n° d'enregistrement
au C.N.R.S.
AO 11618

THESE DE DOCTEUR INGENIEUR

présentée

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

Philippe MAGRE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR INGENIEUR

Sujet de la thèse : Etude du transfert de masse dans un culot en écoulement supersonique.

Soutenue le 24. 6. 1975 devant la Commission d'Examen

M. L. MALAVARD ..... Président

MM. J.J. BERNARD .....
J. GOSSE ..... } Examinateurs
G.B. DIEP .....

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THESE DE DOCTEUR INGENIEUR

présentée

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

Philippe MAGRE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR INGENIEUR

Sujet de la thèse : Etude du transfert de masse dans un culot en écoulement supersonique.

Soutenue le 1975 devant la Commission d'Examen

M. L. MALAVARD ..... Président

MM. J.J. BERNARD .....
J. GOSSE ..... } Examinateurs
G.B. DIEP .....

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A mes parents,

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548106_0037

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Jean Joseph BERNARD, qui m'a accueilli dans son laboratoire, pour le soin avec lequel il a dirigé ce travail et pour les conseils qu'il n'a jamais cessé de me prodiguer.

Je remercie Monsieur le Professeur Lucien MALAVARD qui a accepté de présider le jury de cette thèse.

Je remercie Monsieur le Professeur Jean GOSSE qui a bien voulu continuer de s'intéresser à un de ses anciens élèves en acceptant de faire partie du jury.

J'assure Monsieur Gia Ban DIEP de toute ma gratitude pour son aide et ses encouragements amicaux tout au long du déroulement de cette étude.

Je voudrais remercier chacun des membres de mon équipe de recherche et tout spécialement Mademoiselle BELLAIR et Madame BISCH pour leur étroite collaboration.

Enfin, j'associe à ces remerciements l'ensemble du personnel du laboratoire pour le concours qu'il m'a toujours apporté.

TABLE DES MATIERES

Pages

NOTATIONS

INTRODUCTION

1 - TRAVAUX ANTERIEURS 3

2 - PRESENTATION D'UN MODELE THEORIQUE 9

2.1 Choix d'un modèle théorique 9

2.2 Zone de mélange 10

2.3 Zone externe 13

2.4 Zone de recirculation 15

3 - METHODE DE RESOLUTION ET PROGRAMME DE CALCUL 17

3.1 Zone de mélange 17

3.1.1 Champ de vitesse 17

3.1.2 Champ de concentration 17

3.2 Zone de recirculation 18

3.2.1 Méthode des directions alternées : généralités 18

3.2.2 Résolution des champs dynamiques et de diffusion 20

3.3 Couplage entre les zones de la théorie de Weiss 21

3.3.1 Principe 21

3.3.2 Formulation du couplage 22

3.3.2.1 Entrée dans la zone de recirculation 22

3.3.2.2 Entrée dans la zone de mélange 22

3.4 Programme de calcul 22

4 - DISPOSITIF EXPERIMENTAL 23

4.1 Choix du mode de création du champ de concentration initial 23

4.2 Dispositif expérimental 23

4.2.1 Soufflerie 24

4.2.2 Maquette et dispositif d'injection 24

Pages

4.2.3 Mesure des pressions..... 25
4.2.4 Mesure des concentrations..... 25
4.2.5 Méthode d'analyse des gaz..... 25
4.3 Dépouillement des mesures..... 26
5 - PRESENTATION DES RESULTATS ET DISCUSSION..... 29
5.1 Déroulement du calcul et convergence..... 29
5.1.1 Champ dynamique..... 29
5.1.2 Champ de concentration..... 30
5.2 Déroulement des expériences..... 31
5.3 Résultats..... 31
5.3.1 Champ dynamique..... 31
5.3.2 Champ de concentration..... 32
CONCLUSION..... 35
ANNEXE..... 37
REFERENCES..... 42
LISTE DES FIGURES..... 45

NOTATIONS

a	paramètre déterminant la ligne sonique
a(i)	coefficients de la série de Fourier (vitesse)
b(i)	coefficients de la série de Fourier (concentration)
b_u	paramètre lié à l'épaisseur de quantité de mouvement
b_τ	paramètre lié à l'épaisseur de concentration
c , c'	vitesse linéarisée (Oseen)
Ch	constante de Chapman-Rubesin
C_M	titre massique
C'_{MAX}	titre massique maximum à une abscisse donnée
C_{MAX}	titre massique avant détente
C_q	coefficient de débit du traceur injecté
c_p	chaleur massique à pression constante
c_v	chaleur massique à volume constant
d(i)	coefficients du gradient de pression
$D_{i,j}$ $D'_{i,j}$	coefficients (Méthode des directions alternées)
$\mathcal{D}$	coefficient de diffusion
E_i	coefficients (Méthode des directions alternées)
f	fonction de Blasius
h_x, h_y, h'_y	pas du maillage dans la zone de recirculation
H	hauteur de la cavité
I	intégrale de pression (zone de mélange)
L	longueur de la ligne de jet
$\mathcal{M}$	masse molaire
M	nombre de Mach
N	nombre de termes des séries de Fourier
NUI, NUJ	nombre de noeuds - 1 sur une ligne i ou j (méthode des directions alternées)
p_j	pression partielle du constituant j d'un échantillon de gaz
p_1	pression statique dans la couche limite
p_{t2}	pression de Pitot

p_t	pression d'arrêt
P	pression
Pr	nombre de Prandtl
q , q_o	vitesse maximale sur la ligne de jet
Q	module de la vitesse
Q_M	débit massique
r, $\bar{r}$	fonctions de la théorie de Chapman Rubesin
Re_H	nombre de Reynolds caractéristique de la zone de recirculation
Re_L	nombre de Reynolds caractéristique de la zone de mélange
S_i	coefficients (méthode des directions alternées)
s_i	sensibilité du spectromètre de masse
Sc	nombre de Schmidt
T	température absolue
u , v	composantes du vecteur vitesse
x , y X , Y	coordonnées cartésiennes

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ β', β_1, β_2 $\gamma', \gamma_1, \gamma_2$	termes de la matrice (méthode des directions alternées)
β	angle de la détente de Prandtl-Meyer
γ	rapport des chaleurs massique des gaz
δ	épaisseur de couche limite
δ_1	épaisseur de quantité de mouvement
δ_τ	épaisseur de concentration
ϵ	seuil de convergence
η_u, η_τ	variables de la zone de mélange
θ_u, θ_τ	épaisseurs de quantité de mouvement et de concentration (zone de mélange)
μ	viscosité dynamique
ν	viscosité cinématique
ξ	rotationnel
$\xi_{u,1}$ $\xi_{u,2}$ $\xi_{\tau,i}$ $\xi_{\tau,2}$	variables zone de mélange
ρ	masse volumique
$\rho_\psi, \rho_\xi, \rho_\tau$	paramètres de convergence (méthode des directions alternées)
τ	variable sans dimensions reliée à la concentration
ω	exposant de la loi de viscosité de Chapman-Rubesin

Indices

-	variable physique
c	culot
D	maximum de vitesse sur la ligne de jet
e	bord de la couche de mélange
L	ligne de jet
MAX	maximal
p	paroi
s	ligne sonique
∞	infini amont

INTRODUCTION

Les études concernant l'écoulement de culot en régime supersonique sont maintenant nombreuses et précises. Les hypothèses simplificatrices nécessaires pour aborder ce problème ont été peu à peu abandonnées pour aboutir à des modèles théoriques très élaborés. Par ailleurs, de nombreuses expériences ont été réalisées. Ainsi ont été mis en évidence des phénomènes peu visibles dans les premiers temps, comme le choc de lèvre ou l'influence du nombre de Reynolds sur la pression de culot. De la même manière une connaissance plus fine de l'écoulement a pu être acquise notamment au voisinage des points singuliers.

Parallèlement à ces recherches de nombreuses études, dont le but était de diminuer le transfert de chaleur au culot, associent à ces écoulements dans le proche sillage des effets de soufflage. D'abord on ne s'intéressa qu'aux effets globaux d'un soufflage intense, puis l'importance de ce phénomène conduisit à des études plus détaillées comportant des mesures de concentrations en gaz injecté : soit directement dans le culot, soit en amont, avant le décollement de la couche limite.

Afin de mieux comprendre les phénomènes de diffusion dans une cavité placée dans un écoulement supersonique nous avons fixé deux objectifs à cette étude :

- essayer d'adapter et de modifier un modèle théorique, déjà utilisé pour les problèmes de proche sillage, pour qu'il permette de décrire le mécanisme de la diffusion,
- comparer ce modèle à des résultats expérimentaux.

Dans ce but, il nous faut bâtir un schéma expérimental introduisant un champ de diffusion dans un écoulement de culot sans pour autant le modifier au point que des comparaisons avec un modèle théorique ne soient plus possibles.

Dès lors, le déroulement de cette étude a été le suivant. Dans un premier temps un choix a été effectué parmi les nombreuses théories

évoquées précédemment ; ce choix étant un compromis entre des études simplifiées qui ne pourraient pas tenir compte de la diffusion et des études récentes d'une grande précision mais dont l'adaptation à notre problème risque d'être plus délicate. La théorie de WEISS /1/ a été finalement retenue. Elle a conduit à la mise au point d'un programme de calcul sur ordinateur après une simplification qui rend nécessaire l'introduction de données expérimentales.

Dans un deuxième temps, des essais ont été menés en soufflerie : ceux-ci ont consisté à relever les champs dynamique et de diffusion dans la cavité d'une plaque plane sur laquelle se développe en amont une couche limite laminaire de diffusion. Ces essais ont demandé l'implantation et l'étalonnage d'un spectromètre de masse suffisamment précis pour permettre d'effectuer des comparaisons entre les résultats du calcul et ceux des expériences.

1 - TRAVAUX ANTERIEURS

L'étude proposée conduit tout d'abord à examiner le cas de l'écoulement de culot laminaire sans injection. Ce problème a fait l'objet de nombreuses études. Citons par exemple les calculs de traînée où la pression de culot représente un facteur important. La figure 1 est un schéma simplifié des parties constituant cet écoulement de culot.

Une revue générale des auteurs ayant abordé ce sujet a été faite par LYKOUDIS /2/.

LAPINE et VIVIAND /3/ présentent les théories principales qui ont été élaborées en vue de cerner le problème des écoulements de culot. Rappelons d'abord brièvement quelques modèles classiques, leurs hypothèses simplificatrices et les difficultés qu'ils présentent éventuellement.

Le plus ancien d'entre eux est celui de CHAPMAN-KORST /4, 5/. Cette théorie suppose un écoulement de culot répondant aux conditions suivantes : zone de mélange peu épaisse comprise entre l'écoulement externe et une zone d'air mort à pression constante. Par ailleurs, l'épaisseur de la couche limite avant le décollement est négligée et on admet que, sur la ligne de jet, la recompression s'effectue sur une faible longueur. Les équations sont traitées de manière classique par la transformation de Von Mises. En dépit de ces approximations, cette théorie permet d'atteindre, pour des nombres de Reynolds élevés, une bonne valeur de la pression de culot ; les expériences de CHARWAT et YAKURA /6/ ou les formules empiriques de SU et WU /7/ donnent des résultats très voisins de ceux de CHAPMAN.

La théorie de CHAPMAN-KORST est reprise par DENISON et BAUM /8/. Ceux-ci tiennent compte maintenant de l'épaisseur initiale de la couche limite avant le décollement (le profil de départ est un profil de Blasius) mais continuent d'admettre que la couche de mélange est peu épaisse par rapport à la zone de recirculation. L'équation de la quantité de mouvement, découplée de celle de l'énergie par les hypothèses habituelles $\rho\mu / \rho_e \mu_e = C^{te}$, est transformée dans le système des coordonnées de Crocco pour être résolue par une méthode des différences finies. BAUM /9/

présente également une méthode de traitement du point de décollement inspirée par Goldstein. Des écarts dans les résultats sur la longueur de la zone de mélange apparaissent avec la solution limite de Chapman (épaisseur initiale nulle). BAUM, KING et DENISON /10/ affinent leur première approche en résolvant l'équation de l'énergie et introduisent des profils initiaux d'enthalpie de type Crocco tout en conservant les hypothèses et la méthode générale précédentes /8/. La manière de choisir les profils initiaux est très importante car la relation de Crocco n'est pas satisfaisante en tout point de l'écoulement. Enfin, par une sélection convenable de profils initiaux, il est possible de simuler un soufflage dans la couche limite sur la paroi ou bien à travers le culot. En effet, les profils de la zone de mélange n'étant pas modifiés, on utilise dans les deux cas les équations de conservation de la masse.

HUBBARTT /11, 12/ applique la méthode des moments, préconisée par KUBOTA et DEWEY /13/, pour des profils de vitesse semblables en aval du point de séparation et raccordés, en amont de ce point, à un profil obtenu également par la méthode des moments mais pour une loi de viscosité différente (μ proportionnel à T^{ω}) et pour une loi de pression constante ; le raccordement prend en compte la conservation de la quantité de mouvement. La comparaison avec les vitesses sur la ligne de jet obtenues par CHAPMAN et DENISON-BAUM est satisfaisante tant que cette vitesse ne devient pas trop importante.

REEVES et LEES /14/, sans les hypothèses de similitude faites par HUBBARTT, utilisent aussi la méthode des moments mais distinguent maintenant deux zones dans l'écoulement décollé : la zone de mélange et la zone de recompression qu'il faudra raccorder à la première. Pour traiter la première zone, les auteurs choisissent des profils de Falkner-Skan à deux paramètres qu'ils introduisent dans les équations des moments d'ordre 0 ou 1 écrites dans le système de coordonnées de Stewartson. La méthode des moments appliquée à la zone de recompression permet d'engendrer deux familles de solutions (dépendant du choix du point de décollement) : la solution à retenir est l'enveloppe des deux familles et passe par un point critique. Le raccordement est assuré en écrivant la continuité de certains paramètres de l'écoulement sur la ligne de jet : nombre de Mach, vitesse et épaisseur de déplacement.

Toutes ces théories font abstraction du couplage existant entre les zones voisines de l'écoulement. En particulier la structure de la zone de recirculation n'est pas examinée en raison des faibles valeurs de la vitesse de l'écoulement et la présence de l'onde de choc de décollement n'est pas

prise en considération.

WEINBAUM /15/ étudie en détail la détente de la couche limite afin de déterminer l'onde de choc du décollement et la forme exacte de la ligne de jet que CHAPMAN avait supposée rectiligne. Pour ce faire, WEINBAUM adopte le modèle d'écoulement suivant : pour la partie supersonique de la couche limite, l'analyse dimensionnelle permet de justifier l'hypothèse d'un écoulement non visqueux, après examen de chacun des termes des équations complètes de Navier-Stokes ; dans la partie subsonique, les ondes de détente se réfléchissant contre la zone de recirculation deviennent des ondes de compression dont l'enveloppe constitue l'onde de choc de décollement. Pour traiter l'interaction d'une onde de Mach avec une couche d'entropie, WEINBAUM a recours à deux méthodes suivant l'importance de l'angle du faisceau de détente : si cet angle est important, la méthode des caractéristiques rotationnelles est applicable, par contre, si cet angle est faible,il retient des méthodes analytiques faisant appel à des approximations du second ordre dans les développements en série représentant les variations de la pression et du nombre de Mach de l'écoulement. Il utilise également une formulation spéciale pour le cas transsonique. Cette méthode donne de bons résultats si l'on compare les positions des ondes de choc, calculées d'une part et observées par des strioscopies d'autre part.

WEISS /1, 16/ et WEISS-WEINBAUM /17/ utilisent les méthodes précédentes dans la théorie complète qu'ils élaborent pour traiter l'écoulement de culot dans le cas de nombres de Reynolds modérés. De manière désormais classique, ils partagent l'écoulement en trois zones. Dans la première zone - zone extérieure- où l'écoulement est rotationnel la théorie de Weinbaum peut s'appliquer ; il n'est pas tenu compte dans ce cas de la partie subsonique de la couche limite qui est en général négligeable. Dans la seconde zone -zone de mélange- la méthode de linéarisation d'Oseen permet d'obtenir les expressions analytiques de la vitesse et de l'enthalpie en tout point de cette zone, les équations sont alors découplées en choisissant Prandtl et $\rho \mu / \rho_e \mu_e = C^{te}$. Enfin, dans la dernière zone -zone de recirculation- on ne peut plus se contenter des hypothèses de Chapman qui ne sont valables que pour un nombre de Reynolds tendant vers l'infini, aussi Weiss résout-il complètement les équations de Navier-Stokes en incompressible par une méthode des différences finies explicite, la stabilité de cette méthode impose une limite supérieure au nombre de Reynolds basé sur l'écoulement de recirculation. Chacune de ces zones ne peut être calculée qu'à l'aide des conditions aux limites fournies par la zone immédiatement voisine. Il faut donc utiliser

un procédé itératif qui peut être long et difficile. Néanmoins, la comparaison avec les résultats expérimentaux de TODISCO et PALLONE /18/ montre un bon accord pour la position du point de recollement et pour les températures d'arrêt.

A la suite des travaux de Weiss, TRAN CAM THUY /19/ propose une solution différente pour la zone de recirculation. Les équations de la quantité de mouvement et de la conservation se transforment à l'aide des opérateurs des différences finies en deux problèmes de Dirichlet couplés : chacun d'eux est résolu par une méthode de sur-relaxation explicite par point (ligne de jet courbe) ou implicite par ligne (ligne de jet rectiligne) ; le couplage entre ces deux problèmes s'effectuant après une sous relaxation pour éviter les instabilités à grand nombre de Reynolds. La comparaison faite avec les résultats de Weiss est satisfaisante ; cependant, on ne peut pas atteindre de solutions pour des nombres de Reynolds supérieurs à 600. Le problème thermique est examiné dans les cas incompressible et compressible. L'équation de l'énergie en incompressible est résolue par une méthode de sous-relaxation ou de sur-relaxation (pour cette dernière la discrétisation par différences décentrées introduit des imprécisions). Pour des nombres de Mach plus élevés, jusqu'à M = 0,6, l'hypothèse de "quasi-compressibilité " se traduit par un nombre de Reynolds variant localement et conduit à chercher simultanément les champs dynamiques et thermiques. L'approximation "Reynolds constant" pour des écoulements faiblement compressibles est suffisante pour atteindre une solution satisfaisante.

VIVIAND /20/, en choisissant un modèle d'écoulement de fluide parfait à tourbillon, masse volumique et températures uniformes, donne une théorie valable uniquement pour des nombres de Reynolds élevés. Il s'agit de résoudre l'équation de Poisson dans un domaine dont l'une des frontières, la ligne de jet, est inconnue : on obtient une valeur approchée de la vitesse après avoir évalué le tourbillon puis, par un calcul variationnel, la forme de la ligne de jet. Celle-ci est trouvée presque rectiligne si le nombre de Mach est petit.

Toutefois, l'application des théories précédentes se heurte à de nombreuses difficultés notamment lorsqu'il s'agit d'effectuer le couplage entre les différentes régions ; le choix d'un système de coordonnées valable à la fois dans le proche sillage et en aval du point de recollement s'avère également délicat. Enfin, ces théories font appel à de nombreuses approximations, en particulier celle de Weiss repose sur une donnée empirique de la pression de culot. C'est pourquoi OHRENBERGER et BAUM /21/ ont été amenés à présenter une théorie très complète dans laquelle les deux zones sont

délimitées par une ligne de courant proche de la ligne de jet. Dans la zone externe les équations générales sont écrites dans un système de coordonnées intrinsèques et valables avec ou sans intervention de la viscosité.

Les approximations des différences finies de type implicite conduisent à un système d'équations linéaires que l'on résout par itérations successives grâce à une méthode d'élimination gaussienne spécialement adaptée. Pour la zone interne les auteurs utilisent une méthode intégrale, les profils de vitesse et d'enthalpie étant définis à partir de quatre paramètres. Ils sont alors conduits à résoudre simultanément les équations différentielles par une méthode de Kutta-Runge du second ordre. Le couplage entre ces deux zones est naturellement assuré, sur la ligne de courant frontière, par la connaissance des conditions aux limites fournies par la zone voisine. Les profils de Blasius et de Crocco servent de conditions initiales. Comme dans la théorie de Baum, suivant le choix du point de décollement, c'est-à-dire de la pression de culot, on engendre deux familles de solutions n'ayant pas de réalité physique pour la partie aval du sillage : aucun ou deux points d'arrêt. Les itérations à effectuer, pour trouver l'enveloppe de ces deux familles, peuvent être laborieuses dans le cas de nombres de Reynolds peu élevés - grande influence de l'aval sur l'écoulement incident. Cette théorie complète donne des résultats très précis mais les calculs semblent lourds à manipuler.

Dans le but de diminuer les coefficients de transfert de chaleur au culot des études expérimentales sur l'injection de gaz ont été entreprises. Ces études comme celle de GINOUX /22/, montrent qu'une injection même faible dans la zone d'air mort diminue fortement le transfert de chaleur. Ces résultats positifs ont conduit à des investigations plus fines faisant appel à des mesures de concentrations du gaz injecté parvenant à l'aval du culot. Citons comme exemple quelques-unes d'entre elles.

LEWIS et CHAPKIS /23/ dans le cas d'un écoulement turbulent à Mach 4, soufflant différents gaz directement dans le culot constatent que les gradients de pression statique dans le culot sont fortement modifiés par cette injection et que l'on peut faire disparaître la zone de recirculation. L'injection d'hélium est plus efficace que celle d'argon, ce qui rejoint les remarques faites par GINOUX et THIRY /24/ dans des conditions expérimentales différentes.

COLLINS, LEES et ROSHKO /25/, LEWIS, BEHRENS et COLLINS /26/, pour des injections au culot de cylindres ou de corps élancés dans les cas laminaire ou turbulent, indiquent que le champ dynamique dépend du flux de quantité de mouvement injecté tandis que le champ de diffusion est influencé

plus nettement par la masse atomique du gaz injecté. Dans /25/ une configuration particulière est étudiée : on injecte au nez du cylindre. La pression dans le sillage demeure pour ainsi dire inchangée et la concentration dans le culot est presque uniforme, le maximum local se tenant près de la ligne de jet.

2 - PRESENTATION D'UN MODELE THEORIQUE

2.1 CHOIX D'UN MODELE THEORIQUE

Afin de construire un modèle pouvant représenter le mécanisme de la diffusion dans le proche culot nous avons examiné, dans chacune des théories évoquées dans le chapitre précédent, la possibilité d'y introduire simplement ce phénomène de diffusion.

Les premières théories élaborées - CHAPMAN-KORST /4,5/ par exemple - ne tiennent pas compte de l'épaisseur initiale de la couche limite. Il semble donc difficile d'ajouter à ce modèle la présence d'un gaz traceur dans la couche limite de départ. BAUM, KING et DENISON /10/ laissent la possibilité de simuler un soufflage dans la zone de mélange. Cependant le traitement de la région du culot doit être amélioré afin de pouvoir y résoudre l'équation de la diffusion.

Des auteurs comme TRAN CAM THUY /19/ ou VIVIAND /20/ - dans le cas d'un fluide parfait - donnent des modèles plus fins pour la zone de recirculation. Nous voyons maintenant qu'il faut choisir un modèle représentant à la fois la zone de mélange et la zone de recirculation et rendant possible la liaison entre ces deux zones voisines. En effet, ce dernier point est important car c'est à la frontière entre les deux zones que nous aurons les échanges de masse les plus intenses. Il ne faut donc pas que des simplifications trop grandes nous amènent à un modèle schématique qui nous écarterait trop de la réalité physique. Cette condition est réalisée dans la théorie de WEISS /1/. L'équation de l'énergie est résolue à la fois dans les deux zones principales de l'écoulement. L'analogie immédiate entre les équations de la diffusion et de l'énergie permet d'adapter la théorie de WEISS à notre problème. De plus l'introduction de données empiriques dans cette théorie applanira les difficultés de convergence numérique rencontrées par OHRENBERGER et BAUM /21/. Ces derniers présentaient également une théorie très précise de l'écoulement de culot, mais dont la précision même aurait rendu très délicate toute modification du schéma de calcul.

Donnons maintenant le détail de la théorie de Weiss simplifiée - en prenant un champ de température uniforme - dans chacune des zones (fig.1) où elle s'applique.

2.2 ZONE DE MELANGE

Les équations bidimensionnelles de la couche limite sont utilisées pour représenter la zone de mélange. On admet qu'à une abscisse donnée la pression statique reste constante dans toute l'épaisseur de la couche limite. On applique successivement, à ces équations, les transformations de Von Mises et Dorodnytsin en supposant le rapport $\bar{\rho}\bar{\mu}/\bar{\rho}_e\bar{\mu}_e$ constant. On obtient, après linéarisation par la méthode d'Oseen, les formes adimensionnées suivantes pour les équations de la quantité de mouvement et de la diffusion,

(2.1) $$c\,\frac{\partial u}{\partial X} = -\phi + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$$

(2.2) $$c'\,\frac{\partial \tau}{\partial X} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial Y^2}$$

pour le système de coordonnées représenté figure 1.

On définit pour ces équations (les $\bar{}$ représentant les grandeurs physiques)

$$u = \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \qquad X = \frac{\bar{x}\,\bar{u}_e}{\bar{\nu}_e} \qquad Y = \frac{\bar{u}_e}{\bar{\nu}_e}\int_0^{\bar{y}} \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_e}\,d\bar{y}$$

$$\tau = \frac{C_{MAX} - C_M}{C_{MAX}}$$

où C_M est le titre massique du gaz injecté et C_{MAX} le titre maximum à la paroi avant la détente,

c est la vitesse linéarisée d'Oseen et c' est déduite de c par la relation $c' = c\,Sc$ (Sc : nombre de Schmidt $= \frac{\bar{\mu}}{\bar{\rho}\bar{\mathcal{D}}}$),

le nombre de Schmidt est supposé constant,

ϕ est le gradient de pression :

$$\phi = \frac{1}{\bar{\rho}_e \bar{u}_e^2} \times \frac{\partial \bar{P}_e}{\partial X} = d(1) + d(2)\,X + d(3)\,X^2$$

Les conditions initiales correspondent aux profils de vitesse et de concentrations définis par :

$$u(0,Y) = 1 - a\,e^{-b_u Y}$$

$$\tau(0,Y) = 1 - e^{-b_\tau Y}$$

où $a = 1 - \frac{\bar{u}_s}{\bar{u}_e}$, $\bar{u}_s$ vitesse sur la ligne sonique avant la détente.

θ_u est l'épaisseur de quantité de mouvement du profil initial

$$\theta_u = \int_0^\infty u(1-u)\,dY$$

$$b_u = \frac{a(2-a)}{2\,\theta_u}$$

Nous introduisons ici, par analogie avec l'épaisseur d'enthalpie, <u>l'épaisseur de concentration</u> θ_τ qui permet d'atteindre b_τ :

$$\theta_\tau = \int_0^\infty u(1-\tau)\,dY = \frac{b_u + (1-a)\,b_\tau}{b_\tau\,(b_u + b_\tau)}$$

Les conditions aux limites sur la ligne de jet sont représentées par les séries de Fourier :

$$u(X,0) = q \sum_1^N a(n) \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right)$$

$$\tau(X,0) = b(0)\frac{X}{2} + \chi \sum_1^N b(n) \cos\left(\frac{n\pi X}{L}\right)$$

- $q = \frac{\bar{u}_D}{\bar{u}_e}$ $\bar{u}_D$ étant la vitesse maximale sur la ligne de jet
- $\chi = \tau_{MAX}$ sur la ligne de jet
- L = longueur de la ligne de jet.

En prenant les transformées de Laplace par rapport à X des équations (2.1) et (2.2), en utilisant les conditions initiales et aux limites puis en repassant aux originaux /27/, on obtient d'après WEISS /1/ :

$$\tau(X,Y) = 1 + \left(b(0)\frac{X}{2} - 1\right) \operatorname{erfc} \eta_\tau + \chi \sum_1^N b(n)\, I_n$$

$$+ \frac{1}{2}\, e^{b_\tau^2 \frac{X}{C} - b_\tau Y} \left(\operatorname{erfc} \xi_{\tau,1} + e^{2b_\tau} \operatorname{erfc} \xi_{\tau,2} - 2 \right)$$

$$u(X,Y) = q \sum_{1}^{N} a(n) \frac{n\pi}{L} \left[\cos\left(\frac{n\pi X}{L}\right) \times \int_{0}^{X} \operatorname{erfc}\left(\frac{Y}{2}\sqrt{\frac{c}{u}}\right) \cos\left(\frac{n\pi u}{L}\right) du \right.$$

$$\left. + \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) \times \int_{0}^{X} \operatorname{erfc}\left(\frac{Y}{2}\sqrt{\frac{c}{u}}\right) \sin\left(\frac{n\pi u}{L}\right) du \right] + 1 - \operatorname{erfc} \eta_u$$

$$+ \frac{a}{2} \left(\operatorname{erfc} \xi_{u,1} + e^{2 b_u Y} \operatorname{erfc} \xi_{u,2} - 2 \right) e^{b_u^2 \frac{X}{c} - b_u Y}$$

$$+ \frac{d(1)}{c} \left(4X\, i^2 \operatorname{erfc} \eta_u - X \right) + \frac{d(2)}{c} \left(16 X^2 i^4 \operatorname{erfc} \eta_u - \frac{X^2}{2} \right)$$

$$+ \frac{d(3)}{c} \left(128 X^3 i^6 \operatorname{erfc} \eta_u - \frac{X^3}{3} \right)$$

avec :

$$\eta_u = \frac{Y}{2}\sqrt{\frac{c}{X}} \qquad \eta_\tau = \frac{Y}{2}\sqrt{\frac{c'}{X}}$$

$$\xi_{u,1} = \eta_u - b_u\sqrt{\frac{X}{c}} \qquad \xi_{u,2} = \eta_u + b_u\sqrt{\frac{X}{c}}$$

$$\xi_{\tau,1} = \eta_\tau - b_\tau\sqrt{\frac{X}{c'}} \qquad \xi_{\tau,2} = \eta_\tau + b_\tau\sqrt{\frac{X}{c'}}$$

$$i^n \operatorname{erfc} X = \int_{X}^{\infty} i^{n-1} \operatorname{erfc} t \, dt$$

(intégrale n$^{\text{ième}}$ de la fonction d'erreur)

$$I_n = e^{-Y\sqrt{\frac{c'n\pi}{2L}}} \cos\left(\frac{n\pi X}{L} - Y\sqrt{\frac{c'n\pi}{2L}}\right)$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{u\, e^{-uX}}{u^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}} \sin\left(Y\sqrt{c'u}\right) du$$

Les gradients de concentration et de vitesse sont :

$$\frac{\partial \tau}{\partial Y}(X,0) = -\sqrt{\frac{c'}{\pi X}}\, b(0)\frac{X}{2} + b_\tau \operatorname{erfc}\left(b_\tau\sqrt{\frac{X}{c'}}\right) e^{b_\tau^2 \frac{X}{c'}}$$

$$+ X \sum_{1}^{N} b(n) \left\{ \frac{c'n\pi}{2L} \left[\sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi X}{L}\right) \right] - \frac{c'}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{u^{3/2} e^{-uX}}{u^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}} du \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y}(X,Y) = -q \sum_1^N \frac{n\pi a(n)}{L}\sqrt{\frac{c}{\pi}}\left[\cos\left(\frac{n\pi X}{L}\right)\times\int_0^X \frac{e^{-\frac{cY^2}{4u}}}{\sqrt{u}}\cos\left(\frac{n\pi u}{L}\right)du\right.$$

$$\left. + \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right)\times\int_0^X \frac{e^{-\frac{cY^2}{4u}}}{\sqrt{u}}\sin\left(\frac{n\pi u}{L}\right)du\right] + \sqrt{\frac{c}{\pi X}}\, e^{-\eta_u^2}$$

$$+ \frac{a}{2}\, e^{b_u^2\frac{X}{c} - b_u Y}\left[-\sqrt{\frac{c}{\pi X}}\left(e^{-\xi_{u,1}^2} + e^{2b_u Y - \xi_{u,2}^2}\right)\right.$$

$$\left. - b_u \operatorname{erfc}\xi_{u,1} + b_u e^{2b_u Y}\operatorname{erfc}\xi_{u,2}\right] + a\, b_u e^{b_u^2\frac{X}{c} - b_u Y}$$

$$- \sum_1^3 \frac{d(n)}{c}\, n!\, 2^{2n+1}\sqrt{\frac{c}{X}}\; X^{n+1}\; i^{2n+1}\operatorname{erfc}\eta_u$$

La vitesse linéarisée c est déterminée de manière à satisfaire, au sens des moindres carrés, les équations non linéaires de la couche limite sur la ligne de jet, c'est-à-dire de manière à rendre minimale l'intégrale $\int_0^L (u-c)^2\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 dX$ soit :

$$\frac{\partial}{\partial c}\int_0^L (u-c)^2\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 dX = 0$$

ce qui donne l'expression formelle :

$$\frac{c}{q} = \frac{2}{\sum_1^N n^2 a(n)^2}\int_0^1 \left(\sum_1^N a(n)\sin\frac{n\pi X}{L}\right)\left(\sum_1^N n\,a(n)\cos\frac{n\pi X}{L}\right) d\left(\frac{X}{L}\right)$$

nous reviendrons plus loin sur l'analyse numérique de cette méthode.

2.3 ZONE EXTERNE

La théorie de Weiss prévoit de traiter cette zone par la méthode des caractéristiques rotationnelles puisqu'il s'agit de la détente d'un écoulement à forts gradients d'entropie. La justification de l'emploi de cette méthode est donnée par WEINBAUM /15/. La faible quantité du gaz traceur dans la partie supersonique de la couche limite n'influence pas les

valeurs de γ , rapport des chaleurs spécifiques du mélange. Cependant, la zone traitée par la méthode des caractéristiques représentait bien dans la théorie de Weiss, une grande partie de la couche limite car l'épaisseur de la partie subsonique de celle-ci était faible. Or, avec un soufflage, on ne peut plus négliger cette zone puisqu'elle peut atteindre 50 % de l'épaisseur totale de la couche limite.

Aussi, afin d'éviter d'entreprendre un calcul lourd et qui ne traiterait qu'une partie très restreinte de l'écoulement extérieur dans laquelle les phénomènes de diffusion sont certainement négligeables, nous avons fait les hypothèses suivantes. On admet, dans un premier temps, que la couche limite se détendant jusqu'à la pression de culot (introduite expérimentalement) le profil des vitesses après cette détente est simplement déduit du profil initial par une rotation d'angle β égal à celui de la détente de Prandtl Meyer ; de plus on conserve les épaisseurs de quantité de mouvement (δ_{1e}) et de concentration ($\delta_{\tau e}$), ces valeurs servant alors à définir les profils de départ de la couche de mélange. Dans cette détente on recalcule les vitesses, nombre de Mach et pression au bord de la couche de mélange. Notons que cette hypothèse ne permettra plus de mettre en évidence la présence du choc de lèvre.

Les hypothèses de la détente se traduisent dans les formules ci-après où M_e est le nombre de Mach au bord de la couche de mélange :

$$M_e = \sqrt{\left(\frac{p_\infty}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(M_\infty^2 + \frac{2}{\gamma-1}\right) - \frac{2}{\gamma-1}} \quad ;$$

et T_e, température au bord de la couche de mélange définie par

$$T_e = T_\infty \left(\frac{p_c}{p_\infty}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad :$$

$$\beta = \operatorname{Arccos} \frac{1}{M_e} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{\gamma+1}{1+\frac{\gamma-1}{2} M_e^2}\right)$$
$$- \operatorname{Arccos} \frac{1}{M_\infty} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{\gamma+1}{1+\frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}\right)^2$$

δ_{1e} l'épaisseur de quantité de mouvement, $\delta_{\tau e}$ l'épaisseur de concentration s'obtiennent à l'aide des formules :

$$\delta_{1e} = \delta_{1\infty} = \int_0^{\delta} \frac{\bar{\rho}\,\bar{u}}{\bar{\rho}_\infty \bar{u}_\infty}\left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_\infty}\right) d\bar{y}$$

$$\delta_{\tau e} = \delta_{\tau\infty} = \int_0^{\delta} \frac{\bar{\rho}\,\bar{u}}{\bar{\rho}_\infty \bar{u}_\infty}\left(1 - \tau\right) d\bar{y}$$

Les indices c, e, ∞ désignent respectivement le culot, le bord de la couche de mélange et l'infini amont de l'écoulement.

Les paramètres θ_u et θ_τ se déduisent aisément si on tient compte des changements de variable :

$$\theta_u = \frac{\bar{u}_e}{\bar{\nu}_e}\,\delta_{1e} \qquad\qquad \theta_\tau = \frac{\bar{u}_e}{\bar{\nu}_e}\,\delta_{\tau e}$$

La différence essentielle introduite par rapport à la théorie de WEISS est donc le calcul empirique des paramètres θ_u, θ_τ et β .

2.4 ZONE DE RECIRCULATION

Les équations de Navier-Stokes, en écoulement incompressible, se mettent, après dérivation, sous la forme adimensionnée suivante :

(2.3) $$\Delta \psi = \zeta$$

(2.4) $$\Delta \zeta = Re_H \left(\psi_x \zeta_y - \psi_y \zeta_x\right)$$

ψ et ζ représentent respectivement la fonction de courant et le rotationnel.

De la même manière, si on suppose le nombre de Schmidt constant, l'équation de la diffusion s'écrit :

(2.5) $$\Delta C_M = Re_H\, Sc \left(\psi_x C_{My} - \psi_y C_{Mx}\right)$$

Dans ces équations, on a :

$$u = \frac{\bar{u}}{\bar{q}_0} = -\psi_y \qquad\qquad v = \frac{\bar{v}}{\bar{q}_0} = \psi_x$$

$$\zeta = \frac{\bar{\zeta}\,\bar{H}}{\bar{q}_0} = v_x - u_y$$

$$x = \frac{\bar{x}}{\bar{H}} \qquad\qquad y = \frac{\bar{y}}{\bar{H}}$$

$\bar{H}$ hauteur du culot

$\bar{q}_0$ vitesse maximale sur la ligne de jet

$Re_H = \dfrac{\bar{q}_0 \bar{H}}{\bar{\nu}}$

Les conditions aux limites de (2.3) (2.4) et (2.5) sont :

- $x = 0$ $\quad \psi = 0 \quad \zeta = \psi_{xx} \quad \dfrac{\partial C_M}{\partial x} = 0$
- $y = 0$ $\quad \psi = 0 \quad \zeta = \psi_{yy} \quad \dfrac{\partial C_M}{\partial y} = 0$
- $y = y_L(x)$ ligne de jet $\quad \psi = 0 \quad \zeta = \zeta_L(x) \quad \dfrac{\partial C_M}{\partial n}$ gradient normal imposé

$\dfrac{\partial C_M}{\partial n}$ s'obtient à partir des dérivées cartésiennes de la concentration :

$$\frac{\partial C_M}{\partial n} = \sin\beta \frac{\partial C_M}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial C_M}{\partial y}$$

Enfin, on peut obtenir le champ de pression dans la zone de recirculation en intégrant les équations de la quantité de mouvement pour x et y constants :

$$P(x,y) - P(0,y) = -\frac{Q^2}{2} + \int_0^x \left(v\zeta - \frac{1}{Re_H} \zeta_y \right) dx$$

$$P(x,y) - P(x,0) = \frac{Q^2(x,0)}{2} - \frac{Q^2}{2} - \int_0^y \left(u\zeta - \frac{1}{Re_H} \zeta_x \right) dy$$

où

$$Q^2 = u^2 + v^2 \qquad P = \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}_D \bar{q}^2}$$

D est le point de la ligne de jet où la vitesse est maximale.

3 - METHODE DE RESOLUTION ET PROGRAMME DE CALCUL

3.1 ZONE DE MELANGE

Déterminer les champs de vitesse et de concentration dans la zone de mélange consiste à rechercher les valeurs des intégrales ou des fonctions transcendantes, introduites dans les expressions analytiques précédentes. Nous donnons quelques indications sur les méthodes adoptées pour définir les champs de vitesse et de concentration.

3.1.1 Champ de vitesse

Pour calculer l'intégrale $n^{ième}$ de la fonction d'erreur on utilise la série convergente /28/

$$i^n \operatorname{erfc} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{2^{n-k}\, k!\, \Gamma\left(1+\frac{n-k}{2}\right)}$$

avec

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

Les autres intégrales s'obtiennent par une méthode des trapèzes avec extrapolation de Romberg.

3.1.2 Champ de concentration

Après avoir effectué les changements de variables appropriés dans les intégrales

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{3/2}\, e^{-uX}}{u^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}}\, du \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\infty} \frac{u\, e^{-uX}}{u^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}} \sin\left(y\sqrt{c/u}\right) du$$

on détermine la borne supérieure de l'intégration pour la méthode des trapèzes. Cette borne supérieure est choisie de manière que l'erreur commise soit inférieure à une tolérance choisie à l'avance. Donnons un exemple

$$J = \int_0^{\infty} \frac{v\, e^{-v}}{v^2+\alpha^2} \sin\left(\eta'\sqrt{v}\right) dv \leqslant \int_0^{A} \frac{v\, e^{-v}}{v^2+\alpha^2} \sin\left(\eta'\sqrt{v}\right) dv + \int_A^{\infty} \frac{e^{-v}}{v}\, dv$$

Le majorant de l'erreur est donc

$$J' = \int_A^{\infty} \frac{e^{-v}}{v}\, dv$$

Après avoir intégré J' par parties on doit résoudre l'inégalité

$$\frac{e^{-A}}{A}\left(1 - \frac{1}{A} + \frac{2}{A^2}\right) < \varepsilon$$

On trouve la valeur de A par la méthode de Newton.

Ainsi, un programme de calcul traitant la zone de mélange à l'aide des formulations et méthodes précédentes fournit vitesse et titre en tout point de la zone de mélange ainsi que leurs gradients sur la ligne de jet.

3.2 ZONE DE RECIRCULATION

WEISS /1/, en discrétisant les équations précédentes par différences finies centrées, doit tenir compte dans le choix du maillage du critère de stabilité : $\bar{h}\,\bar{q}_o/\bar{\nu} < 4{,}5$ ($\bar{h}$ largeur du maillage). Dans notre cas la vérification de ce critère impose un maillage très fin augmentant considérablement le temps de calcul et l'encombrement en mémoire.

TRAN CAM THUY /19/ a présenté une méthode de résolution pour des nombres de Reynolds plus élevés. Cependant les difficultés rencontrées au point de vue stabilité dans le choix des paramètres de sur et sous relaxation ont conduit à utiliser plutôt la méthode numérique des directions alternées qui est intrinsèquement stable.

3.2.1 Méthode des directions alternées : généralités

Exposons cette méthode en prenant comme exemple l'équation (2.3) avec les conditions aux limites déjà citées. La relation (2.3) se discrétise à l'aide des formules de différences finies centrées (Fig.2) . h_x et h_y sont les pas du maillage en x et y

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{h_y^2} = \xi_{i,j}$$

Soit, ψ_{ij}^{2n} et ξ_{ij}^{2n}, le champ dynamique à l'itération 2n. Pour obtenir le champ à l'itération 2 n+1, on peut écrire (2.3) sous la forme

$$\frac{\psi_{i+1,j}^{2n+1} - 2\psi_{i,j}^{2n+1} + \psi_{i-1,j}^{2n+1}}{h_x^2} = \xi_{i,j}^{2n} - \frac{\psi_{i,j+1}^{2n} - 2\psi_{i,j}^{2n} + \psi_{i,j-1}^{2n}}{h_y^2} + \frac{\psi_{i,j}^{2n+1} - \psi_{i,j}^{2n}}{\rho_4}$$

De même, à l'itération 2n + 2 ,

$$\frac{\psi_{i,j+1}^{2n+2} - 2\psi_{i,j}^{2n+2} + \psi_{i,j-1}^{2n+2}}{h_y^2} = \xi_{i,j}^{2n+1} - \frac{\psi_{i+1,j}^{2n+1} - 2\psi_{i,j}^{2n+1} + \psi_{i-1,j}^{2n+1}}{h_x^2} + \frac{\psi_{i,j}^{2n+2} - \psi_{i,j}^{2n+1}}{\rho_4}$$

En regroupant les termes suivant l'indice de l'itération en cours, on obtient :

$$(2.6)\quad \frac{\rho\psi}{h_x^2}\,\psi_{i-1,j}^{2n+1} - \left(1 + \frac{2\rho\psi}{h_x^2}\right)\psi_{i,j}^{2n+1} + \frac{\rho\psi}{h_x^2}\,\psi_{i+1,j}^{2n+1} = D_{i,j}^{2n}$$

$$(2.7)\quad \frac{\rho\psi}{h_y^2}\,\psi_{i,j-1}^{2n+2} - \left(1 + \frac{2\rho\psi}{h_y^2}\right)\psi_{i,j}^{2n+2} + \frac{\rho\psi}{h_y^2}\,\psi_{i,j+1}^{2n+2} = D_{i,j}^{2n+1}$$

$$D_{i,j}^{2n} = \rho\psi\,\xi_{i,j}^{2n} - \psi_{i,j}^{2n} - \frac{\rho\psi}{h_y^2}\left(\psi_{i,j+1}^{2n} - 2\,\psi_{i,j}^{2n} + \psi_{i,j-1}^{2n}\right)$$

$$D_{i,j}^{2n+1} = \rho\psi\,\xi_{i,j}^{2n+1} - \psi_{i,j}^{2n+1} - \frac{\rho\psi}{h_x^2}\left(\psi_{i+1,j}^{2n+1} - 2\,\psi_{i,j}^{2n+1} + \psi_{i-1,j}^{2n+1}\right)$$

La méthode des directions alternées consiste à résoudre successivement les systèmes des équations de type (2.6) et (2.7) jusqu'à ce qu'un seuil de convergence soit atteint. Sur une ligne j (y constant) on a NUJ + 1 noeuds ce qui donne NUJ - 1 équations (2.6) si l'on tient compte des conditions aux limites de type Dirichlet

$$\psi_{1,j} = \psi_{NUJ+1,j} = 0$$

On est donc ramené à résoudre, pour chaque ligne j , équation (2.6), et chaque ligne i , équation (2.7), un système linéaire du type suivant :

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & \beta' & \gamma' & & \\ 0 & \alpha & \beta' & \gamma' & \\ & & & & 0 \\ & & & \alpha & \beta' & \gamma' \\ 0 & & \cdots & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \psi_{2,j} \\ \psi_{3,j} \\ \\ \\ \psi_{NUJ-1,j} \\ \psi_{NUJ,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{2,j} \\ D_{3,j} \\ \\ \\ \\ D_{NUJ,j} \end{bmatrix}$$

La matrice des coefficients est tridiagonale et on peut transformer le système, il vient :

$$\begin{bmatrix} 1 & S_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & S_3 & & \\ & & 1 & S_4 & \\ & & & & 0 \\ & & & 1 & S_{NUJ-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \psi_{2,j} \\ \psi_{3,j} \\ \\ \\ \psi_{NUJ,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2 \\ E_3 \\ \\ \\ E_{NUJ} \end{bmatrix}$$

Le calcul des coefficients S_i et E_i se fait par une loi de récurrence

$$E_i = \frac{D_{i,j} - \alpha E_{i-1}}{\beta' - \alpha S_{i-1}} \qquad S_i = \frac{\gamma'}{\beta' - \alpha S_{i-1}}$$

avec

$$E_2 = \frac{D_{2,j}}{\beta_1} \qquad S_2 = \frac{\gamma_1}{\beta_1}$$

$$E_{NUJ} = \frac{D_{NUJ,j} - \alpha_2 E_{NUJ-1}}{\beta_2 - \alpha_2 S_{NUJ-1}} \qquad S_{NUJ} = 0$$

Ayant obtenu ces coefficients, on peut atteindre la solution

$$\psi_{i,j} = E_i - S_i \psi_{i+1,j}$$

pour la ligne j. On utilise le même procédé pour chaque ligne j (balayage en y). L'équation (2.7) est traitée de la même façon (balayage en x). La vérification de l'inégalité

$$\frac{|\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n}|_{MAX}}{\psi_{MAX}} < \varepsilon$$

est le test de convergence qui arrête les itérations effectuées depuis le champ initial uniformément nul.

3.2.2 Résolution des champs dynamiques et de diffusion

On trouvera dans l'annexe la formulation particulière des paramètres du calcul pour chacune des équations (2.3), (2.4) et (2.5).

Pour obtenir une solution du champ dynamique, on doit résoudre conjointement les équations (2.3) et (2.4) pour une certaine distribution de rotationnel sur la frontière. Pour ce faire, et afin d'accélérer la convergence du calcul, il a fallu trouver un compromis entre les deux possibilités suivantes :

- résoudre complètement l'équation (2.4) pour un certain champ de fonction de courant; puis modifier le champ de fonction de courant en résolvant (2.3) avec le champ de rotationnel obtenu précédemment;
- ne pas attendre que la convergence soit atteinte pour chacune des équations (2.3) et (2.4), mais passer de l'une à l'autre alternativement sans faire plus d'un balayage en x et y pour chacun des champs à déterminer.

Les essais effectués ont montré que la convergence est la meilleure si l'on effectue quelques itérations intermédiaires pour chacune des équations, le nombre optimum d'itérations intermédiaires étant le même pour les équations en ψ et ξ et égal à 5. Le champ de départ, nul ou non, a une influence négligeable sur le déroulement ultérieur du calcul.

Quant aux valeurs du paramètre ρ, leur rôle est prépondérant pour assurer la convergence. Une valeur trop faible de ρ conduit à une convergence

très lente qui peut même provoquer des difficultés dans la représentation numérique des coefficients de la matrice et entraîner un arrêt du calcul. Inversement, la divergence du calcul est la conséquence du choix d'une valeur trop grande de ρ .

Ces valeurs de ρ sont fonction : du pas du maillage, du nombre de Reynolds et de la valeur absolue de l'extrêmum du rotationnel sur la ligne de jet. Nous désignons par ρ_ψ , ρ_ξ , ρ_τ les valeurs du paramètre ρ correspondant à chacune des équations (2.3), (2.4) et (2.5).
Ces valeurs optimales ont été obtenues empiriquement et, pour fixer les idées, on peut donner l'exemple suivant :

$$Re_H = 350 \qquad h_y = 0{,}1 \qquad |\xi|_{MAX} = 600$$

$$\rho_\psi = 2.10^{-3} \qquad \rho_\xi = 3.10^{-7}$$

L'influence du gradient du titre sur la valeur de ρ_τ s'avère également importante.

On n'aborde la résolution du champ de diffusion qu'après avoir obtenu le champ dynamique définitif qui satisfait les conditions du couplage avec la zone de mélange. Le comportement de l'équation (2.5) n'est pas différent de celui des deux équations précédentes.

3.3 COUPLAGE ENTRE LES ZONES DE LA THEORIE DE WEISS

3.3.1 Principe

Le couplage entre les zones externe et de recirculation est simplifié par rapport à la théorie générale. En effet, la donnée de la pression de culot permet de calculer les caractéristiques de l'écoulement à potentiel extérieur ainsi que l'angle de la ligne de jet par rapport à l'écoulement amont. Ces valeurs n'évoluent plus par la suite puisque l'on ne traite pas la détente de la couche limite par la méthode des caractéristiques. Ainsi, les deux domaines du calcul sont désormais fixés. Dans la théorie complète de Weiss la pression de culot serait modifiée et cela changerait la position de la ligne de jet et les valeurs des épaisseurs de quantité de mouvement et de concentration du profil de départ de la zone de mélange. Cependant dans la méthode simplifiée que nous avons utilisée le processus itératif du couplage entre les zones de mélange et de recirculation est conservé. La connaissance de la pression, de la vitesse et de la concentration sur la ligne de jet permet de calculer, à partir de la zone de mélange, le rotationnel et le flux de masse sur cette même ligne. Ceux-ci fournissent les éléments du calcul de la zone de recirculation. On obtient ainsi les nouvelles valeurs de la pression, de la vitesse et de la concentration sur la ligne de jet.

3.3.2 Formulation du couplage

3.3.2.1 Entrée dans la zone de recirculation. Le respect de la continuité des contraintes et du flux de masse sur la ligne de jet permet d'utiliser les expressions adimensionnées suivantes :

$$\xi = Re_L \frac{\sin\beta}{q} \frac{\bar{\rho}_D}{\bar{\rho}_e} \left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)_{Mel}$$

$$\left(\frac{\partial C_M}{\partial y}\right)_{Recir} = -\sin\beta\, Re_L\, C_{MAX} \frac{\bar{\rho}_D}{\bar{\rho}_e} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Y}\right)_{Mel}$$

3.3.2.2 Entrée dans la zone de mélange. Les termes des séries de Fourier représentant vitesse et concentration sur la ligne de jet s'obtiennent classiquement par les formules :

$$a(i) = 2\sin\beta \int_0^{\frac{1}{\sin\beta}} u_{Recir} \sin(i\pi X \sin\beta)\, dX$$

$$b(i) = 2\sin\beta \int_0^{\frac{1}{\sin\beta}} \frac{1}{X}\left(1 - \frac{C_M}{C_{MAX}}\right) \cos(i\pi X \sin\beta)\, dX$$

Pour obtenir les coefficients d(i), on écrira simplement que la distribution de pression

$$P - P_c = d(1)\, X + d(2)\, X^2 + d(3) X^3$$

satisfait, au sens des moindres carrés, l'égalité avec la pression calculée au même endroit à l'aide de la zone de recirculation. Cette condition se traduit par le système de trois équations linéaires à trois inconnues (d(i)) :

$$\frac{dI}{d(1)} = \frac{dI}{d(2)} = \frac{dI}{d(3)} = 0$$

I représentant l'intégrale

$$I = \int_0^L \left[P - P_c - d(1)\, x - d(2)\, x^2 - d(3)\, x^3\right]^2 dx$$

3.4. PROGRAMME DE CALCUL

Le programme de calcul de la théorie de WEISS (organigramme figure 3) est écrit en Fortran IV. Il est constitué d'environ 1200 ordres, son encombrement en mémoire est de 180 K octets et son exécution complète nécessite deux minutes environ sur l'ordinateur IBM 370-168 du CIRCE.

4 - DISPOSITIF EXPERIMENTAL

4.1 CHOIX DU MODE DE CREATION DU CHAMP DE CONCENTRATION INITIAL

La possibilité de souffler le traceur par une fente percée sur la plaque plane a d'abord été retenue (travaux de POREH et CERMAK /29/ pour une couche limite turbulente). Cependant, deux nécessités contradictoires se présentent : d'une part, il faut des doses en gaz traceur suffisamment importantes pour qu'elles puissent être décelables dans le culot après la détente ; d'autre part, il ne faut pas provoquer de trop grandes perturbations pouvant modifier la nature de la couche limite. Pour respecter cette dernière condition, TSEN /30/ propose le critère suivant : l'approximation de la couche limite est vérifiée si $\bar{v}_p < \bar{v}_\infty$ et si $\frac{\bar{v}_p}{\bar{u}_\infty} \ll 1$, $\bar{v}_p$ et $\bar{v}_\infty$ étant respectivement les composantes normales de la vitesse de soufflage à la paroi et à l'infini. Un calcul simplifié a été effectué en appliquant ce critère à la méthode des différences finies préconisée par CORNIL /31/ : le calcul prouve qu'il n'est pas possible d'obtenir des concentrations assez élevées dans la couche limite sans la détruire.

Pour injecter une dose suffisante de traceur dans la couche limite il faut donc recourir à une plaque poreuse. Le programme de calcul de DUDECK /32/, basé sur la méthode aux différences finies de SPALDING-PATANKAR /33/ fournit les profils de vitesses, de concentration et de température se développant sur une plaque poreuse ou imperméable. Il a été adapté en lui fournissant comme départ les profils de couche limite de CHAPMAN-RUBESIN /34/. Ces profils sont donnés par :

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\infty} = \frac{1}{2} f'(\eta)$$

$$\frac{\bar{T}}{\bar{T}_\infty}(\bar{x},\eta) = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \, r(\eta)$$

où f est solution de l'équation de Blasius $ff'' + f''' = 0$,

avec $f'(\infty) = f'(0) = f(0) = 0$ et

$$\frac{\bar{y}}{2}\sqrt{\frac{\bar{u}_\infty}{\bar{\nu}_\infty \bar{x}\, Ch}} = \eta + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \bar{\pi}(\eta)$$

Ch, la constante de CHAPMAN-RUBESIN est définie par :

$$Ch = \sqrt{\frac{\bar{T}_p}{\bar{T}_\infty}} \times \frac{\bar{T}_\infty + 110}{\bar{T}_p + 110}$$

$$\pi(\eta) = \frac{Pr}{2} \int_\eta^\infty f''(\xi)^{Pr} \int_0^\xi f''(\theta)^{2-Pr}\, d\theta\, d\xi .$$

$$\bar{\pi}(\eta) = \int_0^\eta \pi(\eta)\, d\eta$$

Pr est pris égal à 0,72.

Ces profils de vitesse et de température sont calculés par une méthode de Kutta-Runge à quatre approximations.

Le calcul de DUDECK, mis au point dans le domaine subsonique, ne peut indiquer que les ordres de grandeurs des débits et des concentrations attendus dans la couche limite de diffusion mais ces prévisions suffisent pour éviter des tâtonnements dans la recherche d'un débit convenable de traceur.

4.2 DISPOSITIF EXPERIMENTAL

4.2.1 Soufflerie

Les essais ont été effectués dans la soufflerie SH2 du laboratoire d'Aérothermique. Cette soufflerie à fonctionnement continu et à veine libre a les caractéristiques principales suivantes :

Mach = 4,92

Température génératrice = 453°K

Pression génératrice = 8,53 10^6 Pascals

Reynolds/m = 1,3.10^7

4.2.2 Maquette et dispositif d'injection

La maquette (fig.4) est une plaque rectangulaire dans laquelle a été creusée, à 55 mm du bord d'attaque, une marche d'une hauteur de 9,5 mm.

En amont de la marche le dispositif de soufflage du traceur est constitué par une cavité fermée par une plaque de bronze fritté.

Deux plaques, de porosité en volume comprise entre 40 et 50 % et ayant respectivement un seuil d'arrêt de 30 μ et 50 μ, ont ainsi été réalisées. La maquette n'est introduite dans la veine d'expérience qu'une fois l'amorçage de la soufflerie effectué. Une prémaquette sans dispositif d'injection mais avec prises de pression statique a été essayée auparavant.

Pour contrôler les conditions d'injection (débit, température, pression) du traceur - l'argon ou l'hélium - on utilise des débitmètres à bille. Un capteur de pression différentiel permet de surveiller la pression d'injection sous la plaque poreuse.

Les échantillons de gaz prélevés à travers un tube de Pitot, de diamètre extérieur 0,3 mm, sont dirigés tantôt vers les capteurs de pression tantôt vers le spectromètre de masse. La figure 5 donne le schéma général du dispositif expérimental utilisé.

4.2.3 Mesure des pressions

Suivant la zone de l'écoulement étudiée, on est amené à utiliser des capteurs de pression de gamme 0-1000 millibars ou 0-50 millibars. La commutation vers ces capteurs est assurée comme celle des prélèvements par deux électrovannes. Les pressions de référence de ces capteurs différentiels sont fournies par une pompe mécanique. Le réglage de l'alimentation des capteurs permet d'obtenir une lecture directe des pressions en mm de mercure.

4.2.4 Mesure des concentrations

On utilise un spectromètre de masse quadripolaire Riber QS 100 B dont les principales performances sont indiquées ci-après :

- Balayage automatique ou manuel des masses de 1 à 100 avec possibilité de centrage sur une masse quelconque.
- Vitesse de balayage variable de 50 ms à 30 mn.
- Sensibilité : $1.\ 10^{-13}$ torr d'azote.
- Résolution : $\mathcal{M}/\Delta\mathcal{M} = 2\mathcal{M}$ à 50 % de vallée.
- Pression maximale de travail : 1.10^{-4} torr.

4.2.5 Méthode d'analyse des gaz

L'introduction dans l'enceinte de mesure de l'échantillon à analyser, facilitée par un pompage auxilliaire, est pratiquée à travers une vanne Granville-Phillips qui, par l'intermédiaire d'une jauge Bayard-Alpert, asservit la pression dans l'enceinte à une valeur donnée. L'enceinte est vidée entre chaque prélèvement. Le groupe de pompage de l'enceinte est cons-

titué d'une pompe mécanique, d'une pompe à diffusion d'huile et d'un piège à azote liquide. Le vide limite dans l'enceinte étant de 1.10^{-7} torr et la mesure s'effectuant aux alentours de 7.10^{-6} torr, on n'introduit pas d'erreur supérieure à 2 % sur les pressions partielles mesurées.

Cette méthode expérimentale déjà décrite par COLLINS, LEES et ROSHKO /25/ ne produit pas de pompage sélectif comme l'avaient déjà constaté ces auteurs. Dans le cas d'un pompage continu d'espèces de masses atomiques voisines nous n'avons pas décelé d'écarts dans les concentrations mesurées.

Des hauteurs de pic relevées sur un oscilloscope à mémoire ou sur un enregistreur photographique Bell-Howell, on peut déduire les pressions partielles des constituants de l'échantillon ; ces grandeurs sont en effet proportionnelles, le coefficient de proportionnalité définissant la sensibilité δ_i de l'appareil au constituant étudié. Ces sensibilités ont été déterminées par étalonnage du spectromètre avec des mélanges dosés d'argon et d'air. En relevant la hauteur du pic (Hi) en fonction de la pression partielle du gaz (p_i) on peut tracer, dans la plage de linéarité de l'appareil, les droites de la figure 6. Les pentes de ces droites permettent d'atteindre les coefficients si. On a trouvé :

Gaz	Hélium	Azote	Oxygène	Argon	Eau
si	0,38	2,75	2,48	3,77	2,96

Pratiquement, on détermine le titre massique $C_{Mj} = \frac{\bar{\rho}_j}{\bar{\rho}}$ du constituant j par la formule :

$$C_{Mj} = \frac{\frac{\mathcal{M}_j H_j}{\delta_j}}{\sum_i \frac{\mathcal{M}_i H_i}{\delta_i}}$$

$\mathcal{M}_j$ et H_j sont les masses molaires et les hauteurs de pic du constituant j.

4.3 DEPOUILLEMENT DES MESURES

Les titres locaux sont fournis par la formule précédente programmée sur un calculateur de bureau.

Les dépouillements de couche limite sont effectués sur ordinateur avec les formules classiques de Rayleigh ou de Saint Venant suivant que l'écoulement est supersonique ou subsonique

$$\frac{p_{t_2}}{p_1} = \left(\frac{\gamma+1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma M^2 - (\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad \text{pour } M > 1$$

$$\frac{p_{t2}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad \text{pour } M < 1$$

γ est recalculé en chaque point, dans le cas de la couche limite de diffusion, par la formule :

$$\gamma = \frac{C_M C_{p\ traceur} + (1 - C_M) C_{p\ air}}{C_M C_{v\ traceur} + (1 - C_M) C_{v\ air}}$$

En fait, les variations de γ sont négligeables.

La pression statique à la paroi est extrapolée des mesures de pression d'arrêt du tube de Pitot. Le nombre de Mach local fournit ensuite vitesse et masse volumiques locales :

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\infty} = \frac{M}{M_\infty}\sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}}$$

$$\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_\infty} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left[\left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\infty}\right)^2 - 1\right]\right)^{-1}$$

Le même programme de dépouillement fournit les épaisseurs de quantité de mouvement et de concentration ainsi que le débit d'argon dans la couche limite :

$$\delta_{1\infty} = \int_0^\delta \frac{\bar{\rho}\,\bar{u}}{\rho_\infty \bar{u}_\infty}\left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_\infty}\right) d\bar{y}$$

$$\delta_{2\infty} = \int_0^\delta \frac{\bar{\rho}\,\bar{u}}{\rho_\infty \bar{u}_\infty}\left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_\infty}\right) d\bar{y}$$

$$Q_M = \ell \int_0^\delta \bar{\rho}\,\bar{u}\,C_M\,d\bar{y}$$

où ℓ est l'envergure de la partie poreuse.

Enfin, il faut caractériser l'intensité de l'injection de gaz traceur. Celle-ci dépend de la quantité de mouvement. Afin d'obtenir un paramètre de débit C_q adimensionné nous rapportons cette quantité de mouvement aux conditions à l'infini :

$$C_q = \frac{\overline{\rho_p}\,\overline{v_p}}{\bar{\rho}_\infty\,\bar{u}_\infty}$$

Dans notre cas expérimental, on obtient, pour l'argon, des valeurs comprises entre 2.10^{-4} et 8.10^{-4} environ.

5 - PRESENTATION DES RESULTATS ET DISCUSSION

5.1 DEROULEMENT DU CALCUL ET CONVERGENCE

Après diverses initialisations de paramètres et la lecture des données concernant la forme géométrique du culot et l'écoulement à l'infini amont, le calcul débute par le traitement du champ dynamique de l'écoulement.

5.1.1 Champ dynamique

En premier lieu on aborde le calcul de la zone de mélange. Pour ce faire, il faut disposer d'une distribution de vitesse et de pression sur la ligne de jet afin d'en déduire les coefficients a(i) et d(i). A ce moment on peut obtenir les conditions aux limites sur la ligne de jet nécessaires à la résolution de la zone de recirculation. Des champs de fonction de courant et de rotationnel on tire les distributions de vitesse et de pression sur la ligne de jet. Avant de recalculer les nouveaux coefficients a(i) et d(i) on lisse par un polynôme les valeurs obtenues aux noeuds de la ligne de jet. Un nouveau calcul de la zone de mélange est alors possible. Après avoir corrigé le nombre de Reynolds de la zone de recirculation et obtenu la nouvelle valeur de ρ_ξ assurant la convergence de la méthode des directions alternées :

$$\rho_\xi^{n+1} = \rho_\xi^{n} \frac{|\xi|^{n}_{MAX}}{|\xi|^{n+1}_{MAX}}$$

on passe à un nouveau calcul des champs de fonction de courant et de rotationnel à partir de ceux de l'itération précédente ; une itération générale est alors bouclée.

La mise au point des programmes de calcul de chacune des zones ayant été effectuée séparément avec des valeurs arbitraires des conditions aux limites, il a fallu, pour assurer un couplage correct, faire un choix judicieux des valeurs initiales. Ceci n'a été possible qu'après l'obtention des premiers résultats expérimentaux. En effet, une initialisation quelconque

du calcul a souvent conduit à des comportements divergents. Par exemple, une distribution de pression traduisant une recompression trop brutale fournit, avant que le calcul ne diverge complètement, une solution simulant un décollement dans la zone de mélange avant le point de recollement théorique. On obtient alors, dans la zone de mélange, des composantes tangentielles de la vitesse à valeurs négatives : cet écoulement de retour induit dans la zone de recirculation deux tourbillons de signes opposés. Le calcul ne prenant pas en compte la recompression supersonique dans la zone externe on ne peut pas reproduire le comportement exact du champ dynamique au voisinage du point de recollement. Dans la zone la plus proche du culot les hypothèses de calcul adoptées donneront donc une solution plus satisfaisante qu'en aval. On admet qu'un seuil de convergence général est atteint quand les distributions de vitesse sur la ligne de jet sont elles-mêmes convergentes. Les figures 7,8 donnent l'allure de la convergence du calcul au cours des itérations du point de vue des vitesses et de la pression sur la ligne jet. La figure 9 présente les valeurs du rotationnel ξ sur cette même ligne : les modifications apportées au champ de fonction de courant, par ces changements des valeurs ξ qui constituent une condition à la limite, sont indiquées dans les figures 10,11. Ces schémas ont été obtenus automatiquement sur une table traçante après interpolation entre les valeurs de la fonction de courant aux noeuds du maillage de la zone de recirculation. Notons que la poursuite des itérations au-delà du seuil de convergence fixé par les figures précédentes n'améliore pas les résultats.

5.1.2 Champ de concentration

Ayant obtenu une solution du champ dynamique on peut alors aborder l'étude du champ de diffusion. Pour initialiser ce calcul, il est nécessaire de disposer d'une première approximation du flux de masse sur la ligne de jet. Après essais nous avons retenu comme condition de départ un flux de masse traduisant une entrée de traceur dans le voisinage immédiat du culot et une sortie du gaz plus loin à l'aval. Afin de satisfaire les conditions aux limites à la paroi du culot -flux nul - il faut que le débit global de masse soit nul sur la ligne de jet.

Les itérations effectuées pour assurer le couplage des zones sur la ligne de jet présentent des difficultés. En effet, après avoir calculé un premier champ de diffusion dans la zone de recirculation, on obtient une répartition des concentrations dans la zone de mélange qui présente un maximum sur la ligne de jet ; l'expérience montrera qu'effectivement il en est

assez proche. De ce fait, le gradient des concentrations sur cette ligne est opposé à celui obtenu dans la zone de recirculation, ce qui conduit rapidement à un comportement divergent du calcul. Pour améliorer la solution, en ce qui concerne le champ de diffusion, il faudrait reprendre les hypothèses de manière à obtenir une localisation des maximums des concentrations sur une ligne voisine mais distincte de la ligne de jet.

Néanmoins, grâce à un choix convenable de la condition de départ, nous arrivons à une solution acceptable pour la zone de mélange mais présentant des écarts, dans la zone de recirculation, avec les résultats expérimentaux, comme nous allons le montrer.

5.2 DEROULEMENT DES EXPERIENCES

En vue de choisir une injection de traceur ne détruisant pas la couche limite mais permettant d'avoir des doses d'argon détectables dans le culot, on a relevé les profils de couche limite en amont de la marche avec et sans soufflage. La figure 12 représente les profils de vitesse et de concentration finalement retenus pour le départ du calcul. Les épaisseurs de couche limite observées sont légèrement supérieures à celles prévues par CHAPMAN-RUBESIN /34/ ou STEWARTSON /35/. En effet, la conception de la maquette utilisée ne permet plus de négliger l'influence du bord d'attaque à une distance aussi faible de celui-ci et la nécessité d'installer une chambre de tranquillisation dans la maquette, sur une courte distance, n'a pas permis d'avoir un bord d'attaque très effilé.

Des relevés systématiques de pression statique, de pression d'arrêt et de concentrations ont été effectués à différentes abscisses avec ou sans injection de traceur.

5.3 RESULTATS

5.3.1 Champ dynamique

La figure 13 donne les profils de pression statique dans la marche. Ceux-ci indiquent que la pression, qui demeure constante dans les zones de mélange et de recirculation, n'est que modérément affectée par le soufflage. Les pressions d'arrêt (fig.14) permettent de déterminer la position du choc de lèvre qui reste inchangée malgré le soufflage. On peut dès maintenant, en examinant cette figure, dire que l'injection choisie ne modifie que très peu le champ dynamique obtenu sans aucun soufflage. La vitesse augmente au voisinage de la ligne de jet et la couche de mélange devient plus épaisse comme on pouvait le prévoir d'après la couche limite de départ (fig. 12). De

ces profils de pression on déduit les vitesses et nombres de Mach qui sont portés sur les figures 15,16, en même temps que les résultats du calcul. On remarque un bon accord entre ces profils si l'on décale les courbes de vitesse et des nombres de Mach d'une certaine ordonnée par rapport aux courbes expérimentales ; ces nouvelles origines des courbes théoriques s'alignent sur une droite (fig.20) qui est donc la ligne de jet expérimentale[1]. On observe que cette ligne ne passe pas exactement par l'arête de la marche alors que nos hypothèses de calcul ont admis que la ligne de jet était droite dès ce point singulier et inclinée de l'angle de la détente de Prandtl-Meyer ; en réalité, cette frontière n'est certainement pas placée aussi haut car la couche limite ne décolle pas exactement au point singulier mais légèrement plus bas ; de plus, la ligne de jet ne peut être droite au voisinage du point singulier.

Notons enfin que les strioscopies observées (fig.17) lors des essais ont montré que la zone de recompression était assez mal définie et que la position du point de recollement était affectée par une interaction tendant à l'éloigner en aval : une répercussion sur l'ensemble de la ligne de jet n'est pas à exclure.

5.3.2 Champ de concentration

Les profils de concentration observés (fig.18) indiquent la présence notable de traceur sur le fond de la marche : la valeur du titre à la paroi atteint près de la moitié de la valeur du maximum de concentration à la même abscisse. Le titre à la paroi reste quasi-constant sur une longueur d'environ deux fois et demi la hauteur de la marche.

Les maxima de concentration sont situés au voisinage immédiat de la ligne de jet. La valeur de ces maxima décroît au fur et à mesure que l'on va en aval tandis que la couche de diffusion s'épaissit.

Malgré les réserves faites au sujet du calcul des concentrations, on a reporté sur la figure 18 les profils de concentration théorique. Ils indiquent une diffusion beaucoup plus importante vers la zone externe tandis que dans la zone de recirculation, ils donnent une concentration nulle en traceur sauf au voisinage de la ligne de jet.

---

(1) En réalité les variations de pression au voisinage de la ligne de jet sont difficiles à mesurer exactement. Aussi est-il plus rigoureux de situer la ligne de jet dans la zone grisée de la figure 20.

Les écarts observés entre les résultats théoriques et expérimentaux dans la zone de recirculation ont conduit à entreprendre de nouvelles expériences. En effet, l'argon que nous avons utilisé possède une masse atomique supérieure à celle de l'air. Nous nous sommes alors demandé si la pesanteur et la nature du gaz pourraient intervenir dans le mécanisme d'alimentation de la zone de culot. Pour répondre à cette question, nous avons choisi d'injecter de l'hélium à la place de l'argon et de refaire les mêmes analyses qu'auparavant. Si la pesanteur est un phénomène non négligeable, l'hélium étant très léger, nous devrions obtenir des résultats très différents de ceux de l'argon.

Ces nouvelles expériences ont été menées de manière à ce que les conditions de soufflage soient comparables. Le paramètre C_q a une valeur telle que la couche limite de départ ne soit pas trop modifiée. De plus les nombres de Schmidt et de Prandtl pour l'hélium et pour l'argon sont comparables (respectivement 0,77 et 0,75 pour Sc et à 0,67 pour Pr). Par contre le titre maximal C'_{MAX} n'est pas le même dans les deux cas :

$$\left.\begin{array}{ll} C'_{MAX} = 0{,}26 & \text{pour l'argon} \\ C'_{MAX} = 0{,}12 & \text{pour l'hélium} \end{array}\right\} \quad \text{à } \frac{x}{H} = 0{,}53$$

On remarque qu'en rapportant les titres à leur valeur maximale les profils de concentration relevés (fig.19) tendent vers des valeurs identiques à la paroi.

Il existe au contraire un écart assez faible mais significatif entre les ordonnées des maxima de concentration obtenus pour les deux injections : l'hélium semble diffuser davantage vers la zone externe. L'influence éventuelle de la nature du gaz semble donc limitée à cette région car, dans la zone de recirculation, les profils de concentration coïncident très bien. Remarquons enfin que les maxima de concentration sont alignés aussi bien pour l'hélium que pour l'argon.

La figure 20 montre, près du culot, l'ensemble des lignes caractéristiques de l'écoulement tant du point de vue expérimental que théorique. Ces lignes ont été obtenues à partir des profils dessinés sur les figures rapportant les résultats théoriques et expérimentaux. Le soufflage semble déplacer légèrement vers le haut la frontière où la pression statique atteint sa valeur à l'infini. Par contre la zone à pression d'arrêt constante -zone à écoulement incompressible- n'est pratiquement pas modifiée par le soufflage. La frontière de cette région est naturellement très proche de la ligne de jet expérimentale : rappelons l'écart évoqué précédemment entre lignes de

jet théoriques et expérimentales. Pour ce qui concerne la diffusion il existe un domaine important où la concentration évolue peu et reste pratiquement égale au titre à la paroi ; ce domaine ne coïncide pas avec les résultats théoriques qui repoussent vers le haut la limite supérieure de la diffusion. Comme l'avaient déjà observé COLLINS, LEES et ROSHKO /25/ -pour une configuration expérimentale différente- les extrêma de concentration sont situés au voisinage de la ligne de jet et la concentration reste presque uniforme dans une bonne partie de la zone de recirculation.

CONCLUSION

Pour introduire les phénomènes de diffusion dans la description d'un écoulement de culot nous avons simplifié un schéma de calcul traitant les problèmes thermiques ; ce modèle approché ne prend en compte ni le champ thermique ni la détente rotationnelle, il suppose négligeable leur influence sur l'ensemble. Néanmoins, là où la diffusion joue un rôle important les équations ont été résolues en faisant seulement des hypothèses qui ne risquent pas de donner des solutions physiquement trop différentes de la réalité. C'est ainsi que dans les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible la variation de la viscosité dans la zone de recirculation n'a pas été négligée ; un essai de couplage entre cette zone et le domaine de type couche limite a été effectué : ceci est important si l'on veut traiter correctement le mécanisme de la diffusion à la frontière entre deux zones de caractère différent.

Ce modèle a conduit à la mise au point d'un programme de calcul correspondant à un soufflage d'un gaz étranger en amont du culot. Ce calcul a été associé à la conduite d'expériences en soufflerie. Dans ces dernières le soufflage a été choisi de manière à ne modifier que très peu la configuration générale du champ dynamique. Les expériences ont permis de relever dans l'écoulement de culot le champ dynamique et le champ de concentration.

La confrontation entre les résultats théoriques et expérimentaux permet de faire les remarques suivantes :

- Pour le champ dynamique, les résultats fournis par le calcul sont en bon accord avec ceux obtenus en soufflerie. Les écarts qui subsistent sont dus uniquement aux incertitudes concernant la position et la forme, posée a priori dans le calcul théorique, de la ligne frontière entre les deux domaines que nous avons été amenés à envisager dans notre modèle simplifié.

- Pour le champ de diffusion, qui atteint rapidement un état d'équilibre, les résultats sont trés affectés par les hypothèses simplificatrices retenues. En effet, si la configuration générale du champ de concen-

tration est bien conservée dans la zone de mélange, il subsiste un écart dans la zone de recirculation spécialement en ce qui concerne la valeur du titre en masse à la paroi horizontale.

Les différences observées entre les résultats expérimentaux et ceux du calcul, en ce qui concerne les champs de concentration, nous ont conduits à reprendre avec une injection d'hélium les mesures de concentrations faites avec de l'argon : les deux gaz diffèrent très peu par leurs nombres de Schmidt et de Prandtl mais fortement par leur masse moléculaire, leur diffusivité et leur conductibilité thermique qui sont approximativement dans un rapport 10.

Les résultats très voisins obtenus pour la concentration relative sur la paroi horizontale excluent l'intervention de la pesanteur et de la thermodiffusion qui se manifestent au contraire nettement sur la ligne de jet. L'explication de cet écart doit donc être cherchée dans une alimentation en gaz étranger au niveau de la paroi dans la région de recollement théorique qui n'est pas décelable par les visualisations effectuées ; il n'est également pas exclu que les effets instationnaires observés récemment sur la partie aval de la ligne de jet aient une influence sur ce phénomène ; une étude spéciale de cette région de recollement dans l'optique instationnaire devrait apporter des renseignements fort utiles.

A N N E X E

Nous donnons ici, le détail de la discrétisation des équations (2.3) (2.4) (2.5) en tenant compte de la présence de noeuds irréguliers au voisinage de la ligne de jet (cf. fig. 2 pour le maillage adopté).

EQUATION 2.3

Balayage en y

$$D_{i,j} = \rho_\psi \xi_{i,j} - \psi_{i,j} - \frac{\rho_\psi}{h_y^2}\left(\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}\right)$$

pour i = 2 à NUJ-3

$$D_{i,j} = \rho_\psi \xi_{i,j} - \psi_{i,j} - 2\rho_\psi\left(\frac{\psi_{i,j-1}}{h_y(h_y+h'_y)} - \frac{\psi_{i,j}}{h_y h'_y}\right)$$

pour i = NUJ, NUJ-1, NUJ-2

$$\alpha = \alpha_2 = \frac{\rho_\psi}{h_x^2} \qquad \beta' = \beta_1 = \beta_2 = -\left(1 + \frac{2\rho_\psi}{h_x^2}\right) \qquad \gamma' = \gamma_1 = \frac{\rho_\psi}{h_x^2}$$

Balayage en x

$$D_{i,j} = \rho_\psi \xi_{i,j} - \psi_{i,j} - \frac{\rho_\psi}{h_x^2}\left(\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}\right)$$

pour i = 2 à NUI-1

$$D_{i,NUI} = \rho_\psi \xi_{i,NUI} - \left(1 + \frac{2\rho_\psi}{h_y h'_y}\right)\psi_{i,NUI} + \frac{2\rho_\psi}{h_y(h_y+h'_y)}\psi_{i,NUI-1}$$

$$\alpha = \frac{\rho_\psi}{h_y^2} \qquad \alpha_2 = \frac{2\rho_\psi}{h_y(h_y+h'_y)}$$

$$\beta' = \beta_1 = -\left(1 + \frac{2\rho_\psi}{h_y^2}\right) \qquad \beta_2 = -\left(1 + \frac{2\rho_\psi}{h_y h'_y}\right)$$

$$\gamma' = \gamma_1 = \frac{\rho_\psi}{h_y^2}$$

EQUATION 2.4

Sur les parois, on prend comme approximation du rotationnel /19/ :

$$\xi_{1,j} = \frac{3}{h_x^2}\,\psi_{2,j} - \frac{1}{2}\,\xi_{2,j}$$

$$\xi_{i,1} = \frac{3}{h_y^2}\,\psi_{i,2} - \frac{1}{2}\,\xi_{i,2}$$

Balayage en y

$$D'_{i,j} = \frac{\rho_\xi Re_H}{4 h_x h_y}\Big[(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}) - (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})(\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j})\Big] - \xi_{i,j} - \frac{\rho_\xi}{h_y^2}(\xi_{i,j+1} - 2\xi_{i,j} + \xi_{i,j-1})$$

pour i = 2 à NUJ-3

$$D'_{i,j} = \frac{\rho_\xi Re_H}{2 h_x h_y h'_y (h_y + h'_y)}\Big[(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(-h'^2_y\,\xi_{i,j-1} + (h'^2_y - h_y^2)\,\xi_{i,j} + h_y^2\,\xi_{i,j+1}) - (\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j})((h'^2_y - h_y^2)\,\psi_{i,j} - h'^2_y\,\psi_{i-1,j})\Big] - \xi_{i,j} - \frac{2\rho_\xi}{h_y h'_y (h_y + h'_y)}\Big[h'_y\,\xi_{i,j-1} - (h_y + h'_y)\,\xi_{i,j} + h_y\,\xi_{i,j+1}\Big]$$

pour i = NUJ-2 à NUJ

$$D_{2,j} = D'_{2,j} - \frac{\rho_\xi}{h_x^2}\,\xi_{1,j}$$

$$D_{i,j} = D'_{i,j} \quad \text{pour } i = 3 \text{ à NUJ-1}$$

$$D_{NUJ,j} = D'_{NUJ,j} - \frac{\rho_\xi}{h_x^2}\,\xi_{NUJ+1,j}$$

$\xi_{NUJ+1,j}$ est le rotationnel sur la ligne de jet et est imposé comme condition à la limite.

Balayage en x

$$D'_{i,j} = \frac{\rho_\xi Re_H}{4 h_x h_y}\Big[(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}) - (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})(\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j})\Big] - \xi_{i,j} - \frac{\rho_\xi}{h_x^2}(\xi_{i+1,j} - 2\xi_{i,j} + \xi_{i-1,j})$$

pour j = 2 à NUI-1

$$D'_{i,NUI} = \frac{\rho_\xi Re_H}{2 h_x h_y h'_y (h_y + h'_y)} \Big[(\psi_{i+1,NUI} - \psi_{i-1,NUI}) \times$$

$$\left(-h'^2_y \xi_{i,NUI-1} + (h'^2_y - h^2_y) \xi_{i,NUI} - h'^2_y \xi_{i,NUI+1} \right) - \left(\xi_{i+1,NUI} - \xi_{i-1,NUI} \right) \times$$

$$\left(\psi_{i,NUI} (h'^2_y - h^2_y) - h'^2_y \psi_{i,NUI-1} \right) \Big] - \frac{\rho_\xi}{h^2_x} \left(\xi_{i+1,NUI} - 2 \xi_{i,NUI} + \xi_{i-1,NUI} \right)$$

$$- \xi_{i,NUI}$$

$$D_{i,2} = D'_{i,2} - \frac{\rho_\xi}{h^2_y} \xi_{i,1}$$

$$D_{i,j} = D'_{i,j} \quad \text{pour } j = 3 \text{ à } NUI-1$$

$$D_{i,NUI} = D'_{i,NUI} - \frac{2\rho_\xi}{h'_y (h_y + h'_y)} \xi_{i,NUI+1}$$

EQUATION 2.5

En x = 0 et y = 0, les équations de type (2.5) deviennent afin de traduire la condition à la limite :

$$-\left(1 + \frac{2\rho}{h^2_x}\right) C_{M1,j} + \frac{2\rho}{h^2_x} C_{M2,j} = D_{1,j}$$

$$-\left(1 + \frac{2\rho}{h^2_y}\right) C_{Mi,1} + \frac{2\rho}{h^2_y} C_{Mi,2} = D_{i,1}$$

Balayage en y

Titre sur la ligne de jet :

$$C_{M\,NUJ+1,j} = \frac{1}{\frac{\sin\beta}{h_x} + \frac{\cos\beta}{h_y}} \left[\frac{\partial C_{M(NUJ+1)}}{\partial n} + \frac{\cos\beta}{h_y} C_{M\,NUJ+1,j} + \frac{\sin\beta}{h_x} C_{M\,NUJ,j} \right]$$

$$D'_{i,j} = \frac{\rho_\tau Re_H S_c}{4 h_x h_y} \Big[(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(C_{Mi,j+1} - C_{Mi,j-1}) -$$

$$\left(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1} \right) \left(C_{M\,i+1,j} - C_{M\,i-1,j} \right) \Big] - C_{M\,i,j}$$

$$+ \frac{\rho_\tau}{h^2_y} \left(C_{Mi,j+1} - 2 C_{M\,i,j} + C_{Mi,j-1} \right)$$

pour i = 2 à NUJ-3

$$D'_{1,j} = - C_{M1,j} - \frac{\rho_\tau}{h_y^2}\left(C_{M1,j+1} - 2 C_{M1,j+1} + C_{M1,j+1} \right)$$

$$D'_{i,j} = - C_{Mi,j} - \frac{2\rho_\tau}{h_y h'_y (h_y + h'_y)} \left(h'_y C_{Mi,j-1} - (h_y + h'_y) C_{Mi,j} + h_y C_{Mi,j} \right.$$

$$+ \frac{\rho_\tau Re_H Sc}{2 h_x h_y h'_y (h_y + h'_y)} \left[(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) \left(-h'^2_y C_{Mi,j-1} + (h'^2_y - h_y^2) C_{Mi,j} + h_y^2 C_{Mi,j} \right. \right.$$

$$\left. \left. - (C_{M\,i+1,j} - C_{M\,i-1,j}) \left(-h'^2_y \psi_{i,j-1} + (h'^2_y - h_y^2) \psi_{i,j} + h_y^2 \psi_{i,j+1} \right) \right] \right.$$

pour i = NUJ-2 à NUJ

$$D_{i,j} = D'_{i,j} \qquad \text{pour } i = 1 \text{ à NUJ-1}$$

$$D_{NUJ,j} = D'_{NUJ,j} - \frac{\rho_\tau}{h_x^2} C_{M\,NUJ+1,j}$$

Balayage en x

$$\frac{\partial C_M}{\partial n} = \cos\beta \; \frac{C_{M\,i,NUI+1} - C_{Mi,NUI}}{h'_y} + \sin\beta \; \frac{C_{M\,i,NUI+1} - C_{MW}}{h_x}$$

avec (cf figure 2)

pour les noeuds tels que A $\qquad C_{MW} = C_{M\,i-1,\,NUI+1}$

et les noeuds tels que B

$$C_{MW} = C_{M\,i-1,\,NUI+1} + \frac{h'_y}{h_y}\left(C_{M\,i-1,\,NUI+1} - C_{M\,i-1,\,NUI} \right)$$

$$D_{i,1} = - C_{Mi,1} - \frac{\rho_\tau}{h_x^2}\left(C_{M\,i+1,1} - 2 C_{M\,i,1} + C_{M\,i-1,1} \right)$$

$$D_{i,j} = \frac{\rho_\tau Re_H Sc}{4 h_x h_y} \left[(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) (C_{Mi,j+1} - C_{Mi,j-1}) \right.$$

$$\left. - (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) (C_{M\,i+1,j} - C_{M\,i-1,j}) \right] - C_{Mi,j}$$

$$- \frac{\rho_\tau}{h_x^2}\left(C_{M\,i+1,j} - 2 C_{Mi,j} + C_{M\,i-1,j} \right)$$

pour j = 2 à NUI-1

$$D_{i,NUI} = -C_{Mi,NUI} - \frac{\rho_\tau}{h_x^2}\left(C_{Mi+1,NUI} - 2C_{Mi,NUI} + C_{Mi-1,NUI}\right)$$

$$+ \frac{\rho_\tau R_{eH} S_c}{2h_x h_y h'_y (h_y + h'_y)}\Big[\left(-h'^2_y C_{Mi,NUI-1} + (h'^2_y - h^2_y) C_{Mi,NUI} + h^2_y C_{Mi,NUI+1}\right)$$

$$\times \left(\psi_{i+1,NUI} - \psi_{i-1,NUI}\right) - \left(C_{Mi+1,NUI} - C_{Mi-1,NUI}\right)$$

$$\times \left(-h'^2_y \psi_{i,NUI-1} + (h'^2_y - h^2_y)\psi_{i,NUI} + h^2_y \psi_{i,NUI+1}\right)\Big]$$

$$- \frac{2\rho_\tau}{h'_y (h_y + h'_y)} C_{Mi,NUI+1}$$

Notons enfin la dernière modification concernant :

$$E_{NUI} = \frac{\dfrac{2\rho_\tau}{h_y(h_y+h'_y)} E_{NUI-1} - D_{i,NUI}}{\dfrac{2\rho_\tau}{h_y(h_y+h'_y)} S_{NUI} + 1 + \dfrac{2\rho}{h_y h'_y}}$$

et,

$$S_{NUI} = 0 \ .$$

REFERENCES

/1/ WEISS R.F. - "A new theoretical solution of the laminar hypersonic near wake". AIAA J., 5, 12, 2142-2149 (1967)

/2/ LYKOUDIS P.S. - "A review of hypersonic wake studies". AIAA J., 4, 3, 577-590 (1964)

/3/ LAPINE L., VIVIAND H. - "Introduction à l'étude théorique de l'écoulement de culot". Rapport 66-8 du laboratoire d'Aérothermique du CNRS (1966)

/4/ CHAPMAN D.R., KUEHN D.M., LARSON H.K. - "Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition". NACA TN 3869 (1957)

/5/ KORST H.H. - "Theory for base pressure in transonic and supersonic flows". J. Appl. Mech., 12 (1956)

/6/ CHARWAT A.F., YAKURA J.K. - "An investigation of two dimensional supersonic base pressures". JAS, 25, 2, 122-128 (1958)

/7/ SU M.W., WU J.M. - "Base pressure correlation in supersonic flow". AIAA J., 9, 7, 1429-1431 (1971)

/8/ DENISON M.R., BAUM E. - "Compressible free shear layer with finite initial thickness". AIAA J., 1, 2, 342-349 (1963)

/9/ BAUM E. - "Initial development of the laminar separated shear layer" AIAA J., 2, 1, 128-131 (1964)

/10/ BAUM E., KING H.H., DENISON M.R. - "Recent studies of the laminar base flow region". AIAA J., 2, 9, 1527-1534 (1964)

/11/ HUBBARTT J.E. - "Integral solution for compressible laminar mixing". AIAA J., 2, 9, 1657-1659 (1964)

/12/ HUBBARTT J.E. - "Approximate solution of laminar free layers with initial thickness". AIAA J., 3, 8, 1538-1540 (1965)

/13/ KUBOTA T., DEWEY C.F. - "Momentum integral methods for the laminar free shear layer". AIAA J.,2, 4, 625-629 (1964)

/14/ LEES L., REEVES B.L. - "Supersonic separated and reattaching laminar flows. General theory and application to boundary layer shock wave interaction". AIAA J., 2, 11, 1907-1920 (1964)

/15/ WEINBAUM S. - "The rapid expansion of a supersonic boundary layer and its application to the near wake". AIAA J., 4, 2, 217-226 (1966)

/16/ WEISS R.F. - "Base pressure of slender bodies in laminar hypersonic flow". AIAA J., 4, 9, 1557-1559 (1966)

/17/ WEISS R.F., WEINBAUM S. - "Hypersonic boundary layer separation and the base flow problem". AIAA J., 4, 8, 1321-1330 (1966)

/18/ TODISCO A., PALLONE A. - "Near wake flowfield measurements". AIAA J., 3, 11, 2075-2080 (1965)

/19/ TRAN CAM THUY - "Resolution numérique des équations de Navier-Stokes" Thèse de Docteur-Ingénieur présentée à la Faculté des Sciences de Paris (décembre 1970)

/20/ VIVIAND H. - "Etude théorique de l'écoulement de culot supersonique avec zone de recirculation". La recherche Aérospatiale, 4, 185-195 (1971)

/21/ OHRENBERGER J.T., BAUM E. - "A theoretical model of the near wake of a slender body in supersonic flow". AIAA J., 10, 9, 1165-1172 (1972)

/22/ GINOUX J.J. - "Effect of gas injection in separated supersonic flows" TCEA TN 7 (feb. 1962)

/23/ LEWIS J.E., CHAPKIS R.L. - "Mean properties of the turbulent near wake of a slender body with and without injection". AIAA J., 7, 5, 835-841 (1969)

/24/ GINOUX J.J., THIRY F. - "Cone cavity flow at M = 5,3 with injection of light, medium and heavy gases". Von Karman Institute TN 35 (nov 1968)

/25/ COLLINS D.J., LEES L., ROSHKO A. - "Near wake of a hypersonic blunt body with mass addition". AIAA J., 8, 5, 833-842 (1970)

/26/ LEWIS J.E., BEHRENS W., COLLINS D.J. - "Experimental investigation of the effects of base mass addition on the near wake of a slender body". AIAA J., 9, 8, 1506-1513 (1971)

/27/ COLOMBO S., LAVOINE J. - "Transformations de Laplace et de Mellin - Formulaires, modes d'utilisation". Gauthier Villars (1972)

/28/ ABRAMOWITZ M., STEGUN I.A. -"Handbook of mathematical functions". National Bureau of Standards (juin 1964)

/29/ POREH M., CERMAK J.E. -"Diffusion from a line source in a turbulent boundary layer". I.J.H.M.T., 7, 10, 1083-1095 (1964)

/30/ TSEN L.F. - "Couche limite homogène avec injection continue à la paroi" Séminaire de Mécanique des Fluides, Poitiers (mai 1964)

/31/ CORNIL M. - "Etude d'une couche limite laminaire avec injection uniforme en écoulement hypersonique" Thèse de Docteur-Ingénieur, Paris (1969)

/32/ DUDECK M. - "Contribution à l'étude des couches limites laminaires avec transfert de masse à la paroi". Thèse de 3ème Cycle, Paris (1972)

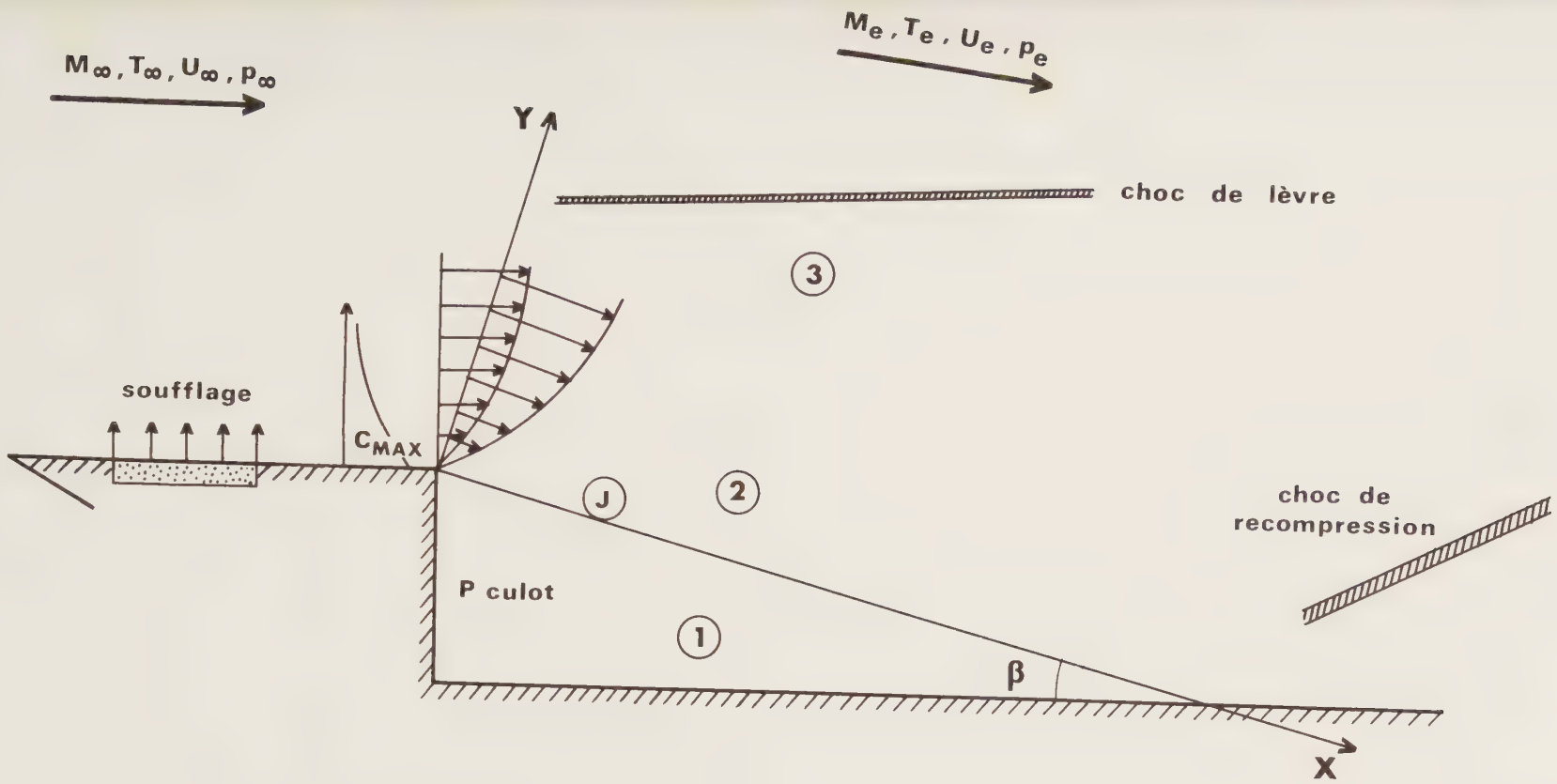
/33/ SPALDING D.B., PATANKAR S.V. - "Heat and Mass transfer in boundary layers". Morgan Grampian, Londres (1967)

/34/ CHAPMAN G.T., RUBESIN - "Temperature and velocity profiles in the compressible laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature". JAS (sept. 1949)

/35/ STEWARTSON K. - "The theory of laminar boundary layers in compressible fluids". Clarendon Press, Oxford (1964)

LISTE DES FIGURES

1 - Schéma général de l'écoulement
2 - Maillage dans la zone de recirculation
3 - Organigramme du calcul
4 - Schéma de la maquette
5 - Schéma du montage expérimental
6 - Etalonnage du spectromètre de masse
7 - Valeurs de la pression au cours des itérations
8 - Valeurs de la vitesse au cours des itérations
9 - Valeurs du rotationnel au cours des itérations
10 - Fonction de courant dans la zone de recirculation
11
12 - Couche limite de départ
13 - Pressions statiques dans le proche culot
14 - Pressions d'arrêt dans le proche culot
15 - Profils de vitesse dans le proche culot
16 - Nombres de Mach dans le proche culot
17 - Strioscopie de l'écoulement
18 - Profils de concentration dans le proche culot
19 - Profils de concentration réduits dans le proche culot
20 - Lignes caractéristiques dans le proche culot



1. Zone de recirculation ou zone d'air mort
2. Zone de mélange
3. Zone externe
J. Ligne de jet

FIG.1

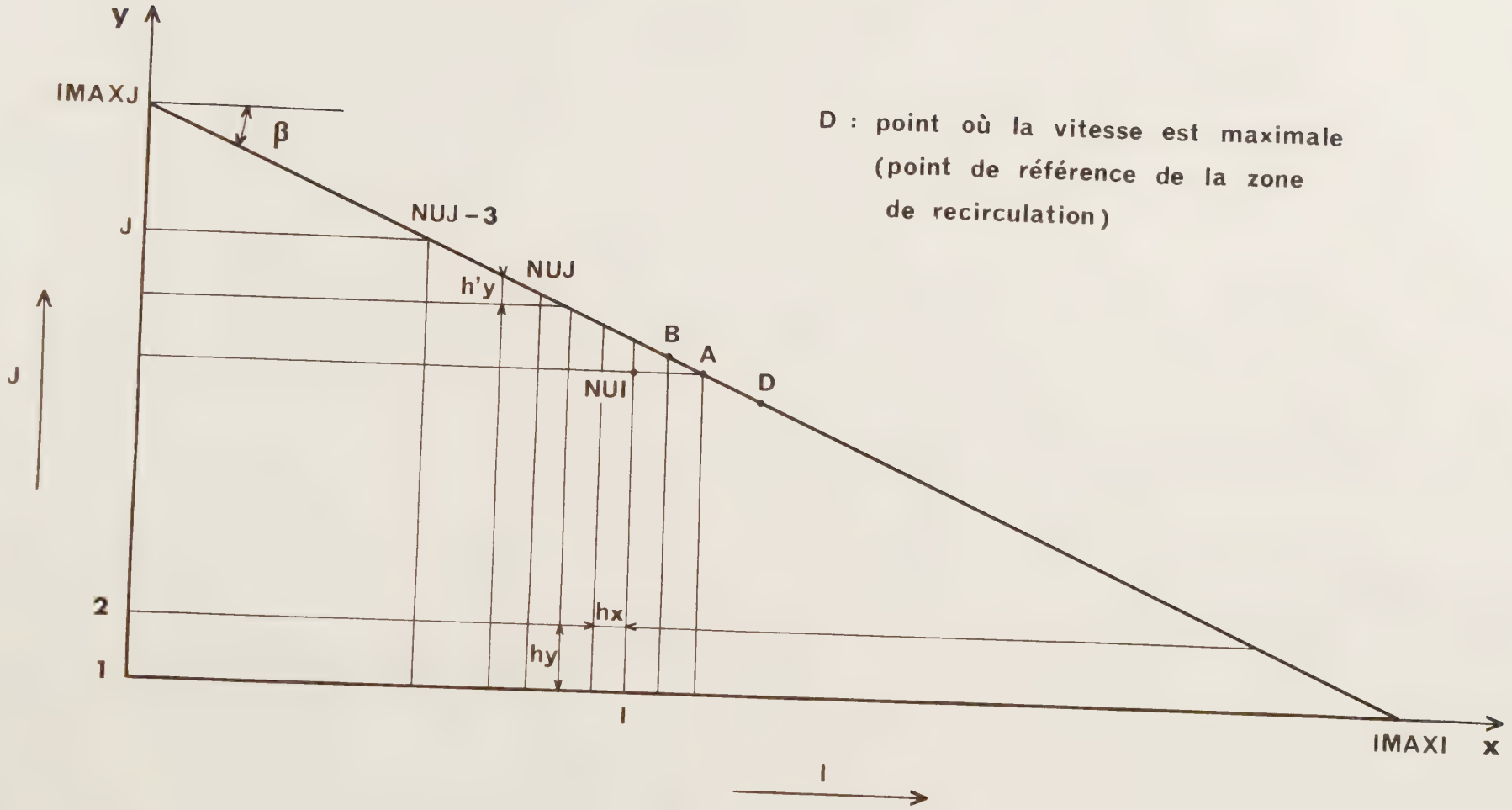

y
IMAXJ
β
J
NUJ – 3
NUJ
h'y
B
A
D
NUI
J
2
1
hx
hy
I
IMAXI
x
I
D : point où la vitesse est maximale
(point de référence de la zone
de recirculation)

FIG. 2

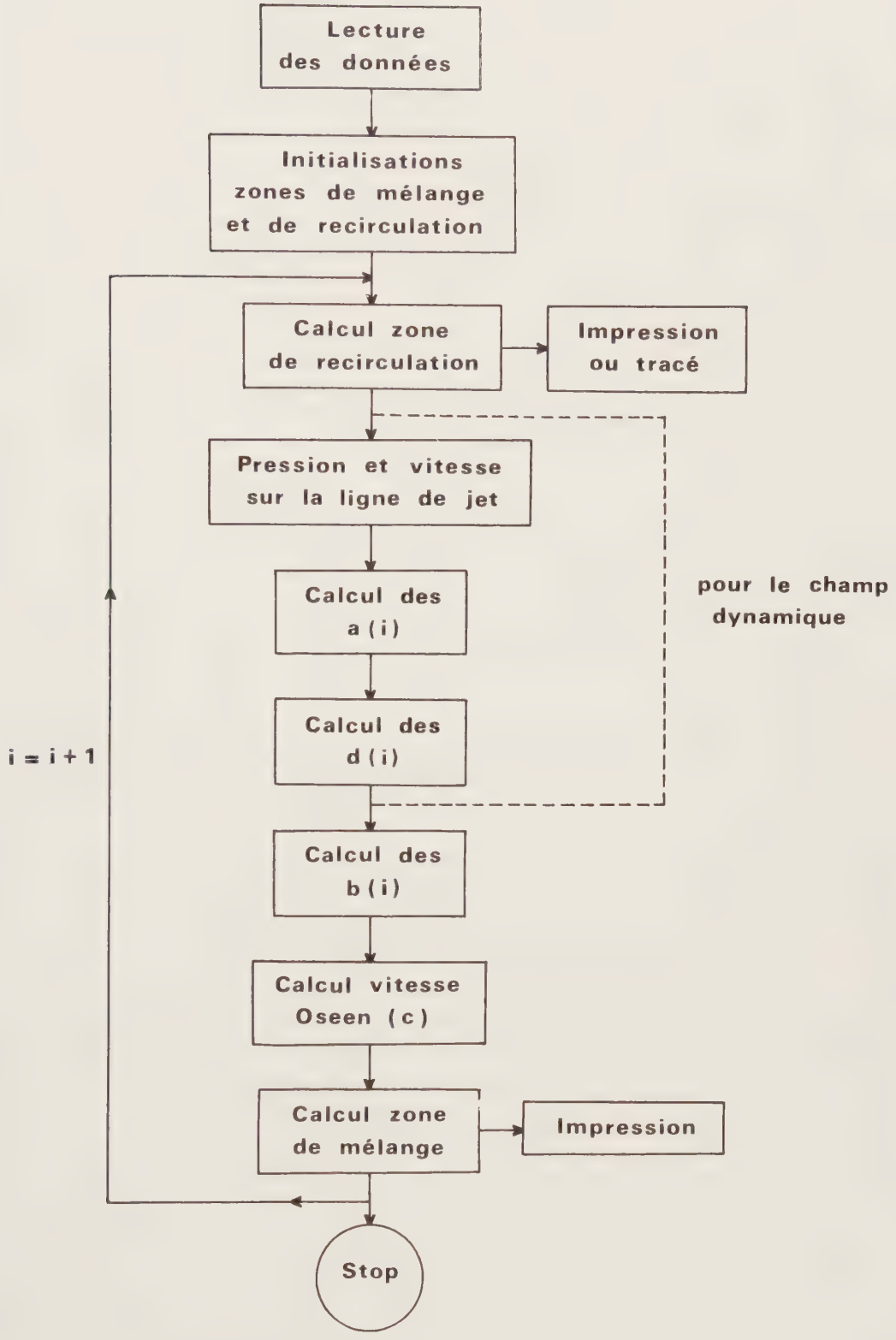

Lecture des données
Initialisations zones de mélange et de recirculation
Calcul zone de recirculation
Impression ou tracé
Pression et vitesse sur la ligne de jet
Calcul des a (i)
Calcul des d (i)
pour le champ dynamique
i = i + 1
Calcul des b (i)
Calcul vitesse Oseen (c)
Calcul zone de mélange
Impression
Stop

FIG. 3

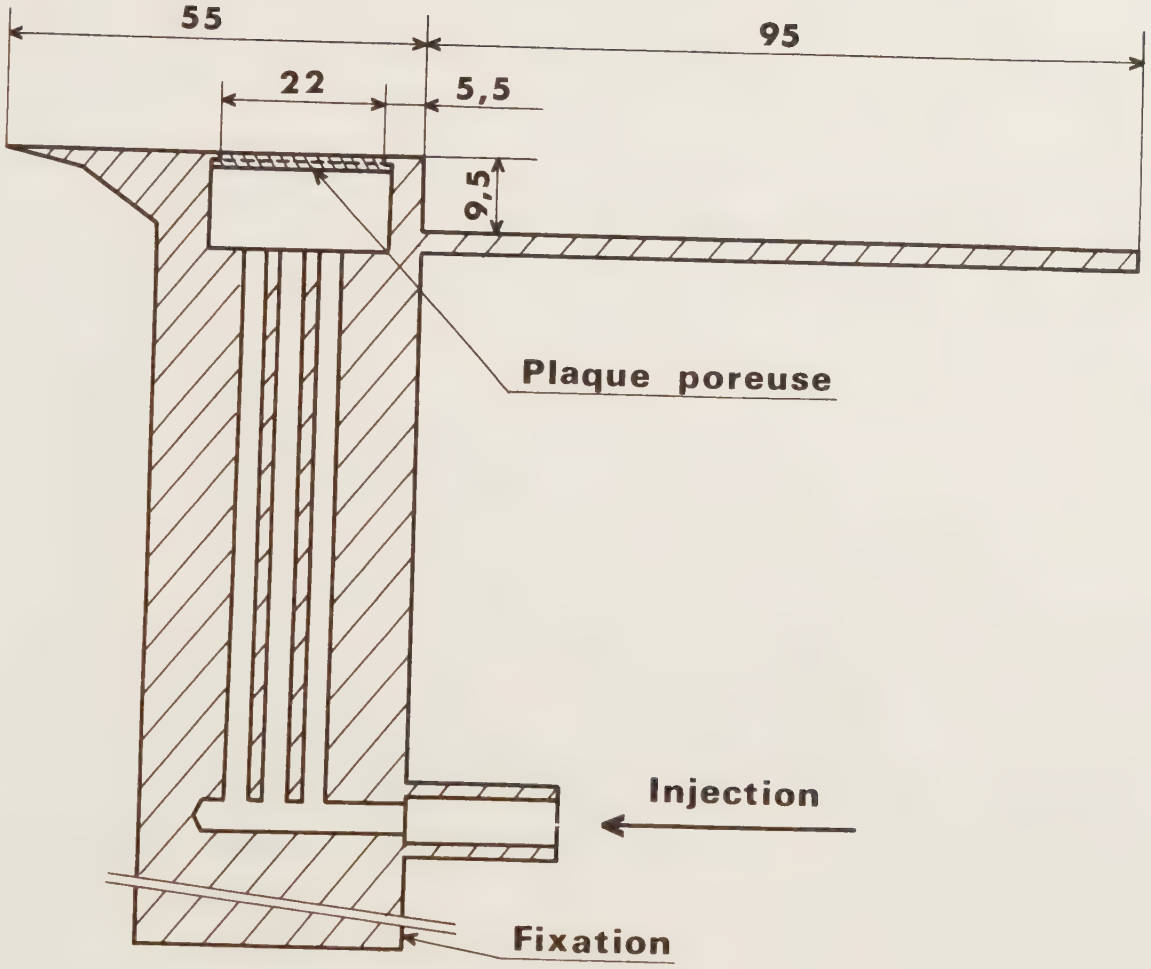


FIG. 4

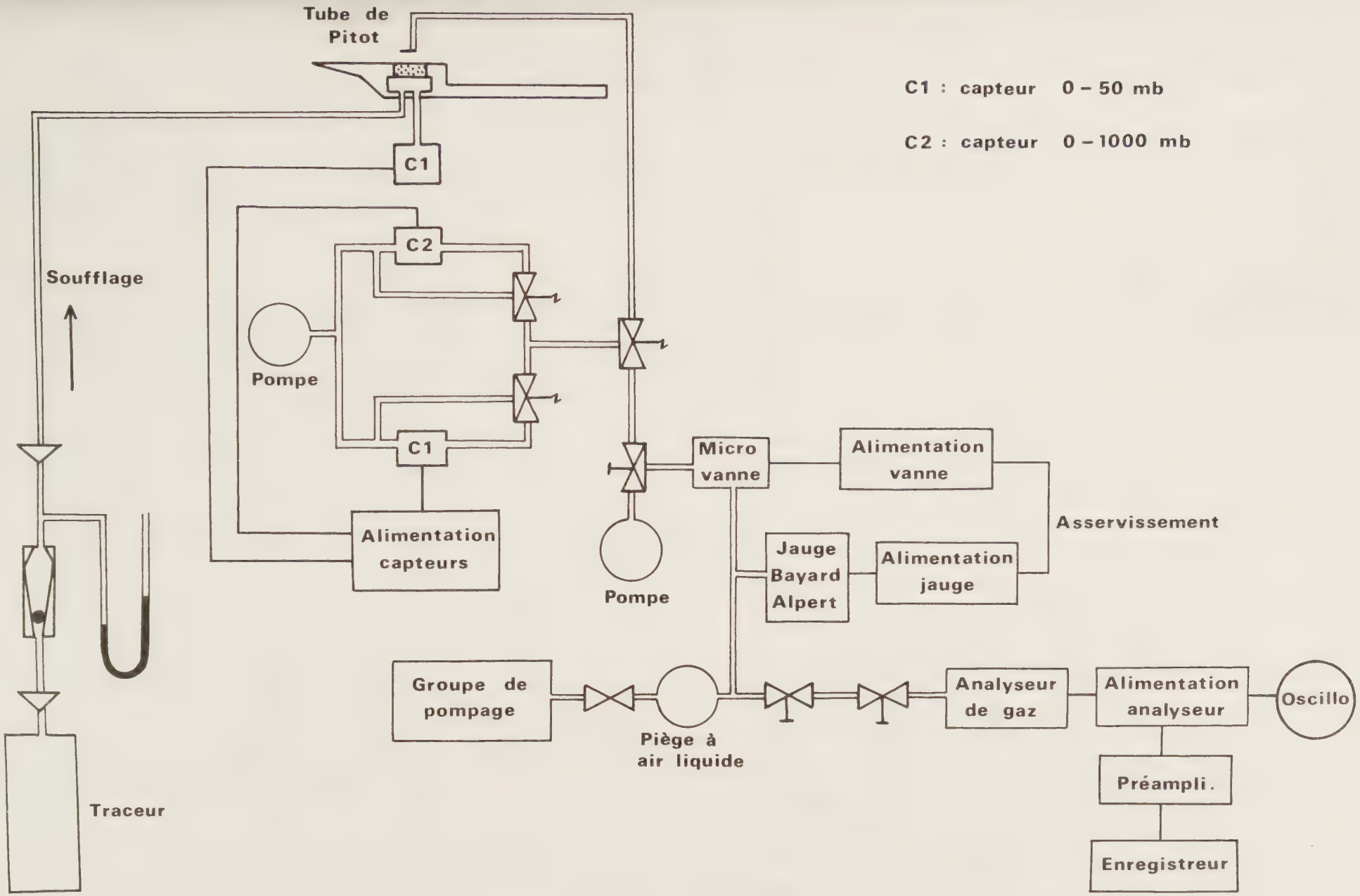

Tube de Pitot
C1 : capteur 0 – 50 mb
C2 : capteur 0 – 1000 mb
C1
C2
Soufflage
Pompe
C1
Alimentation capteurs
Pompe
Micro vanne
Alimentation vanne
Asservissement
Jauge Bayard Alpert
Alimentation jauge
Groupe de pompage
Piège à air liquide
Analyseur de gaz
Alimentation analyseur
Oscillo
Préampli.
Enregistreur
Traceur

FIG. 5

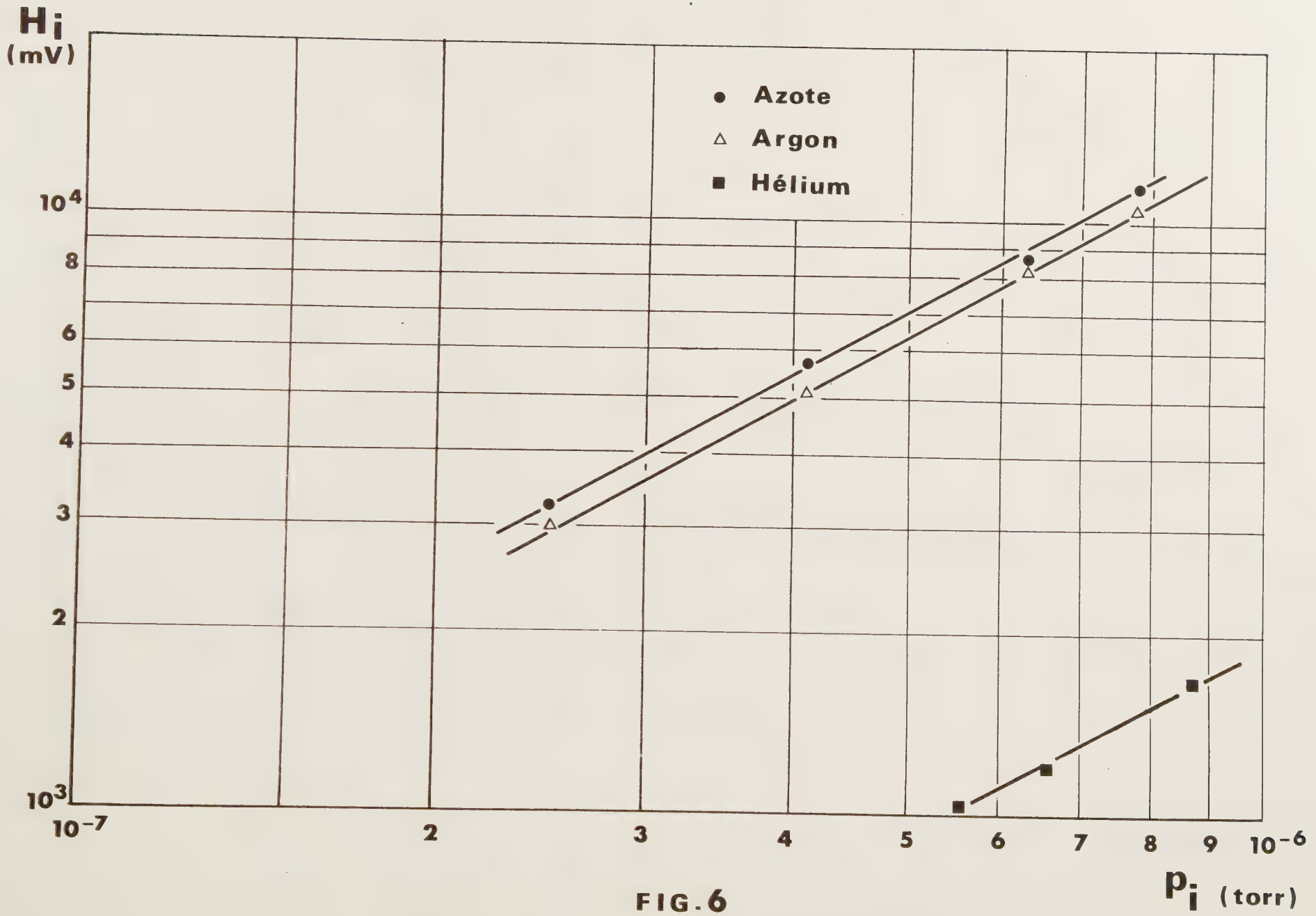

H_i (mV)
10^4
8
6
5
4
3
2
10^3
10^{-7}
2
3
4
5
6
7
8
9
10^{-6}
p_i (torr)
Azote
Argon
Hélium

FIG.6

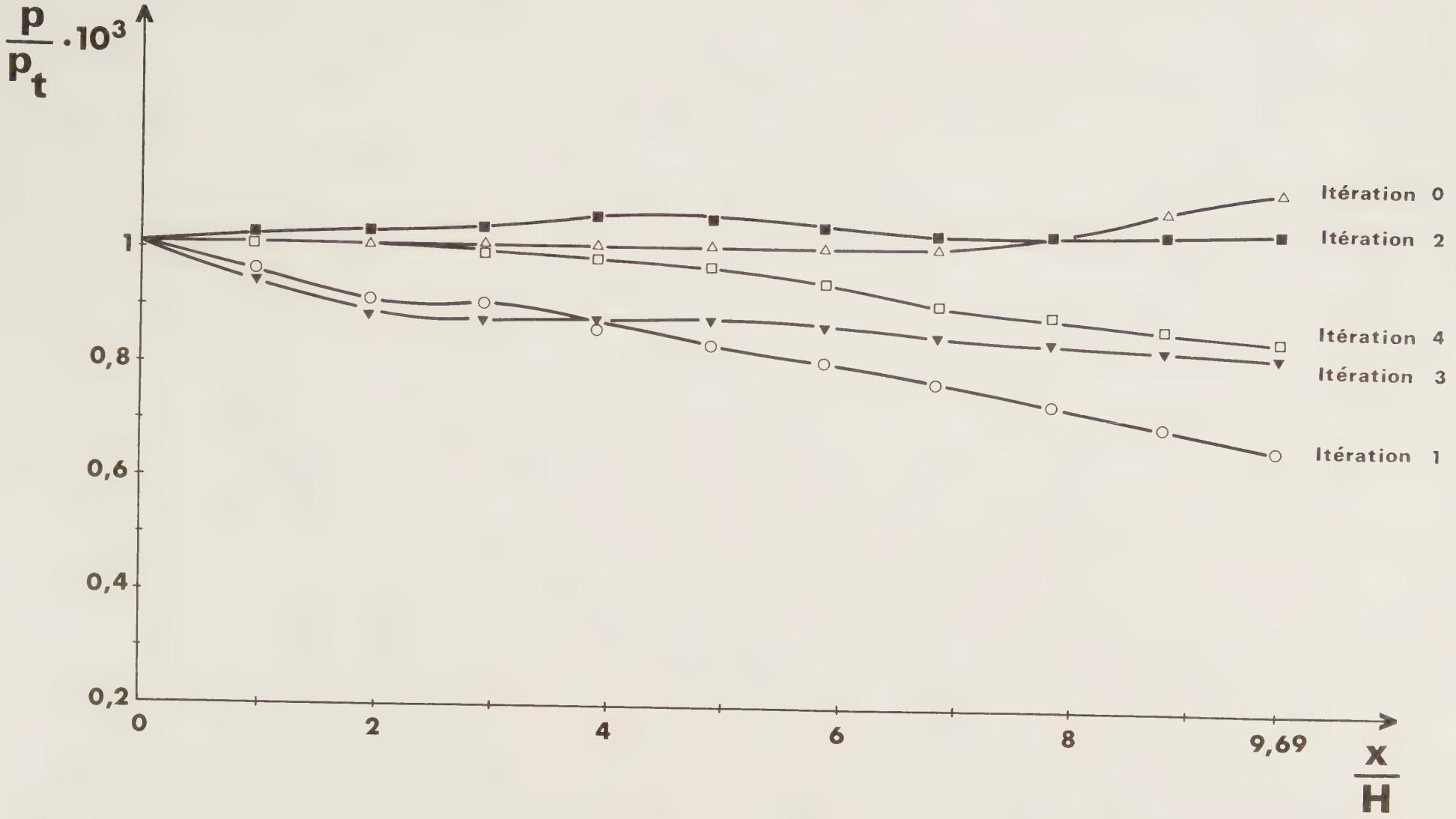

p/p_t .10^3
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
2
4
6
8
9,69
X/H
Itération 0
Itération 2
Itération 4
Itération 3
Itération 1

FIG. 7

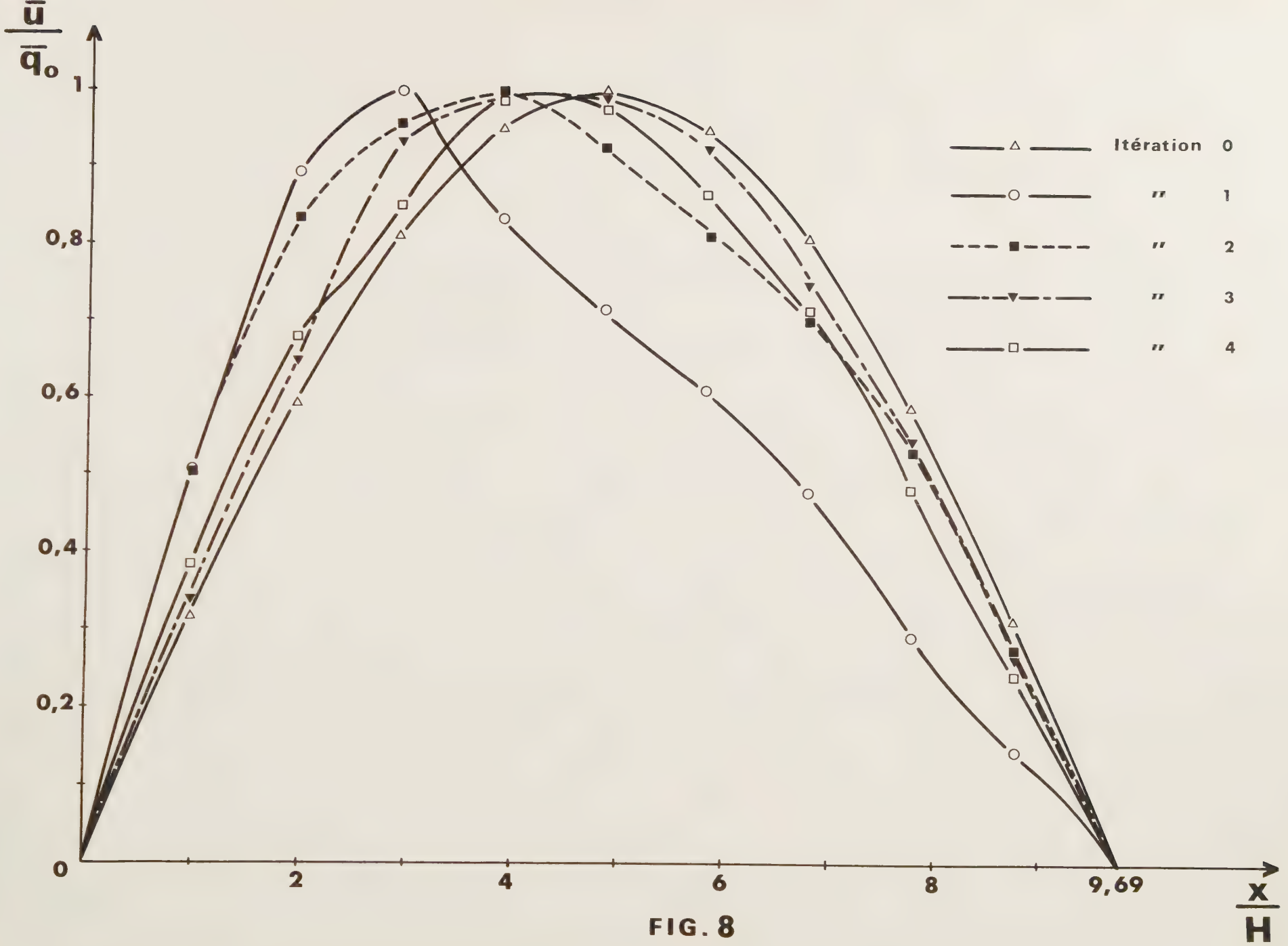


FIG. 8

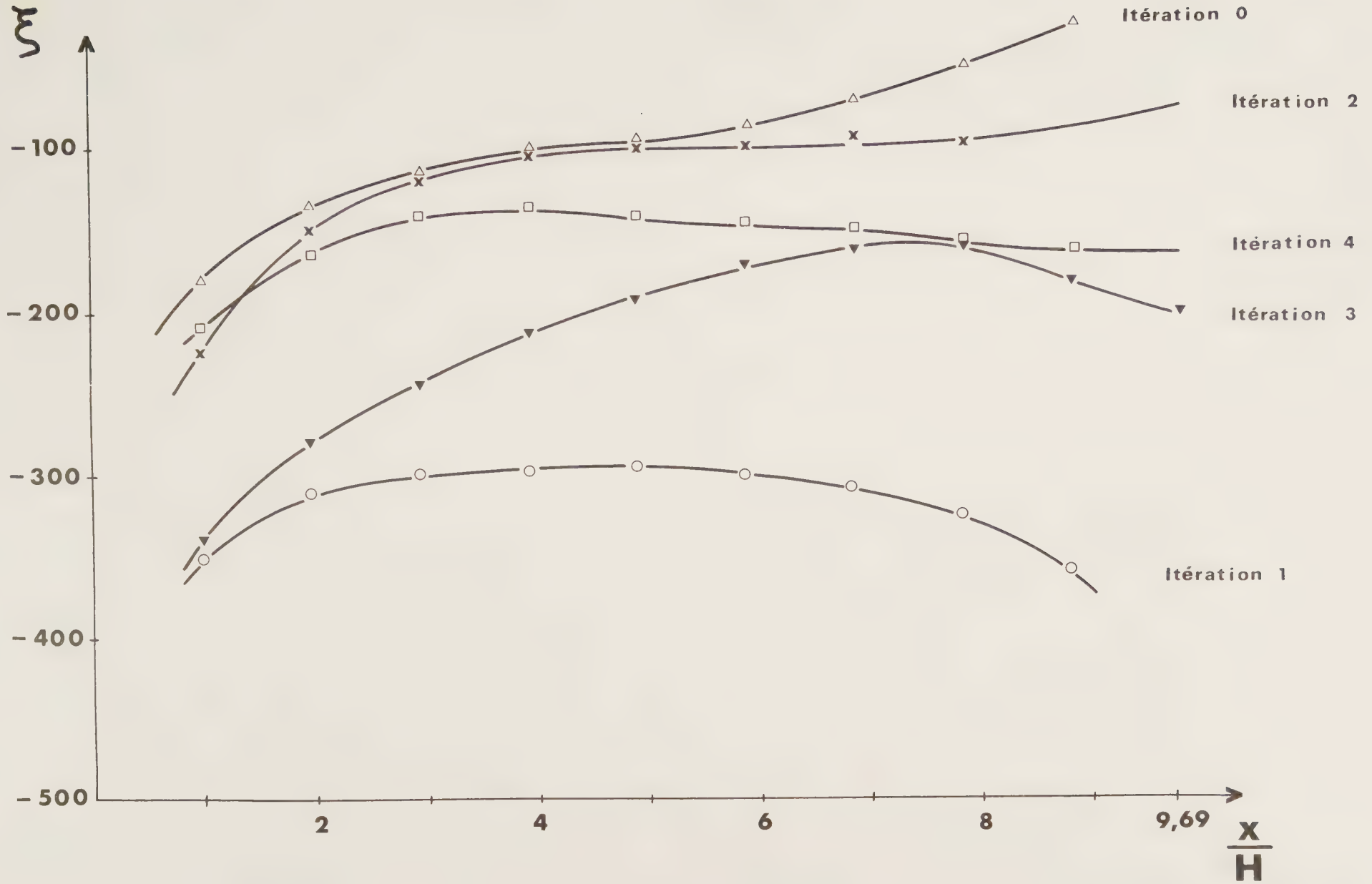

Ξ
-100
-200
-300
-400
-500
2
4
6
8
9,69
X/H
Itération 0
Itération 2
Itération 4
Itération 3
Itération 1

FIG.9

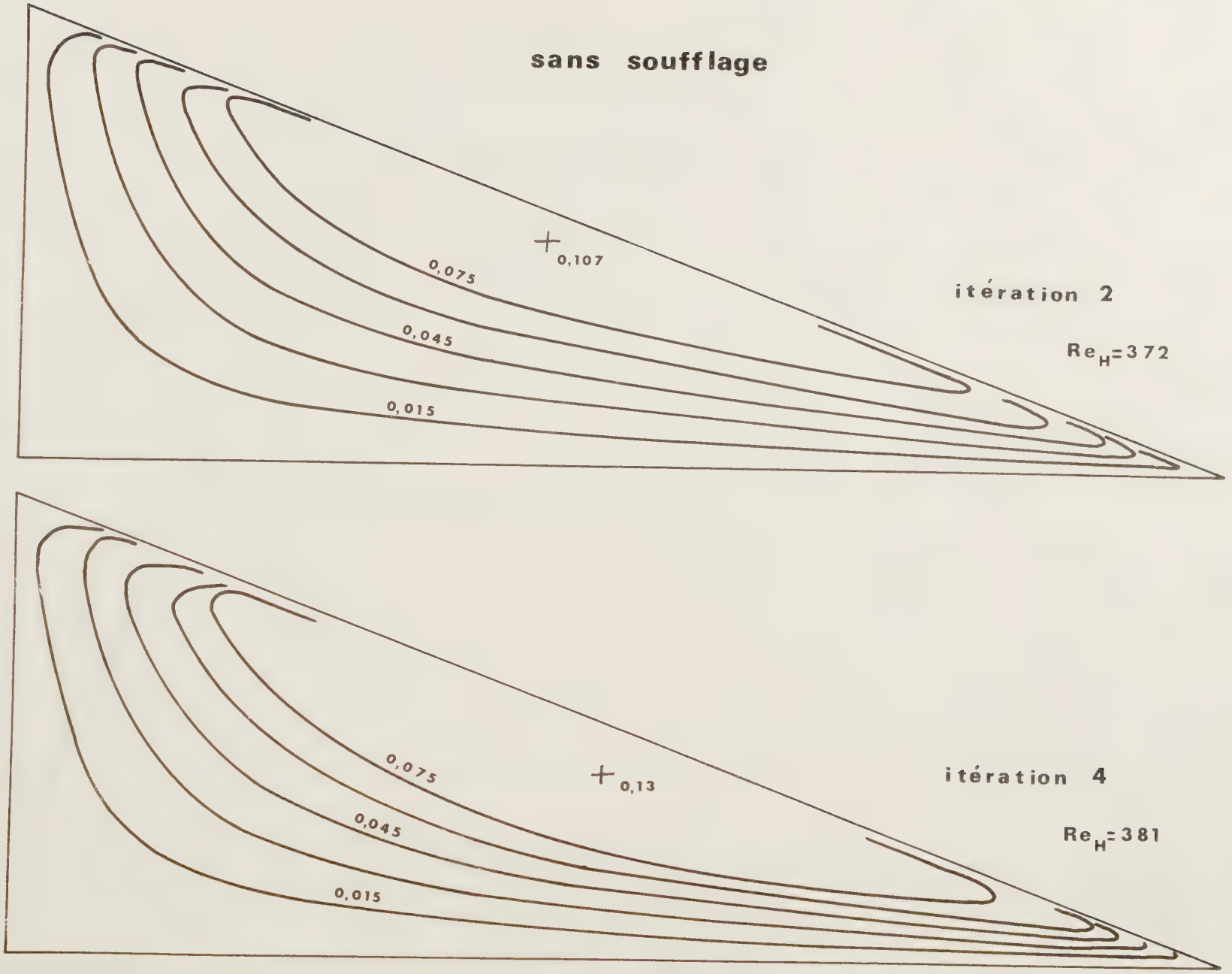

sans soufflage
0,075
0,045
0,015
0,107
itération 2
Re_H=372
0,075
0,045
0,015
0,13
itération 4
Re_H=381

FIG.10

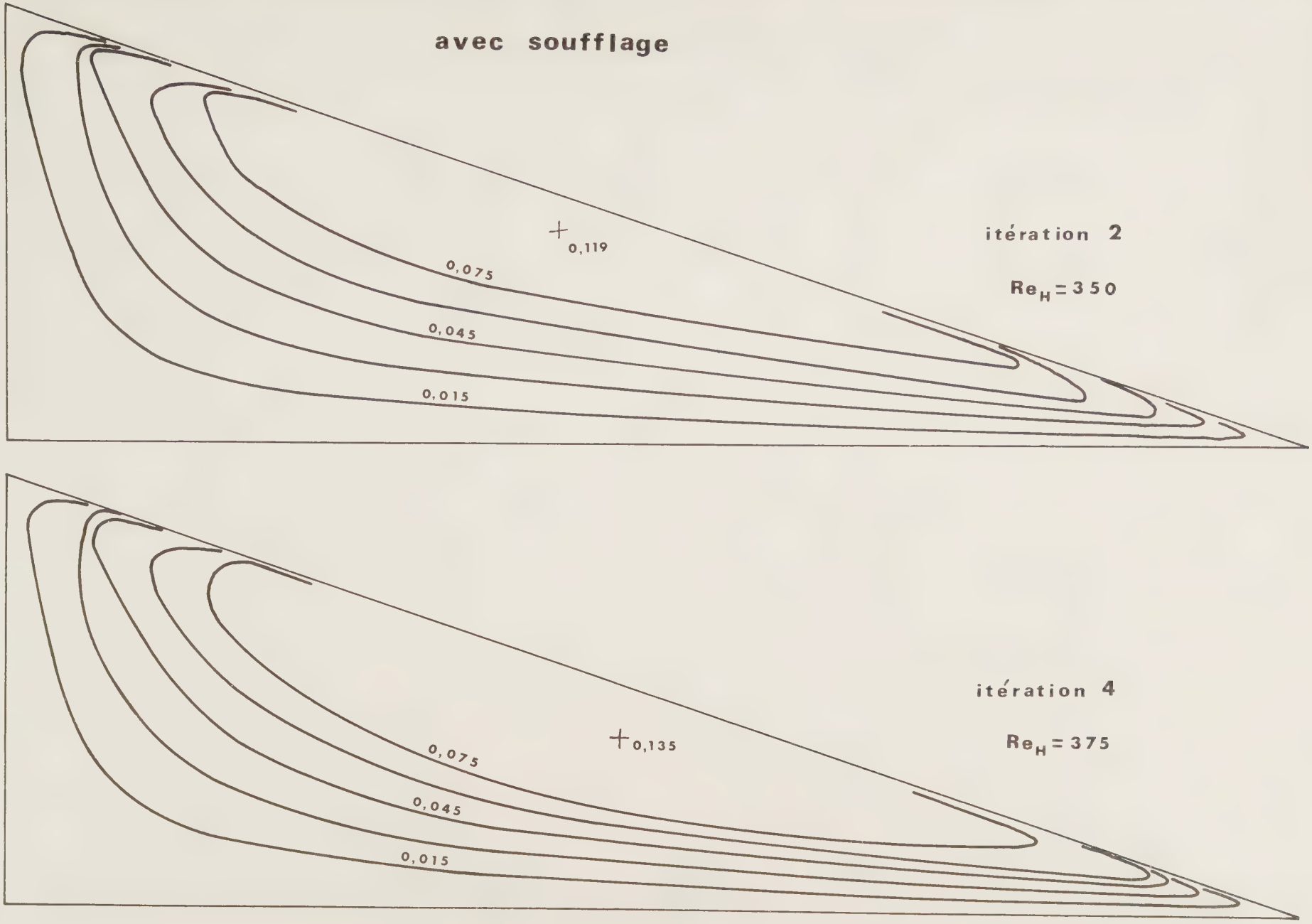

avec soufflage
0,119
0,075
0,045
0,015
itération 2
Re_H = 350
0,135
0,075
0,045
0,015
itération 4
Re_H = 375

FIG.11

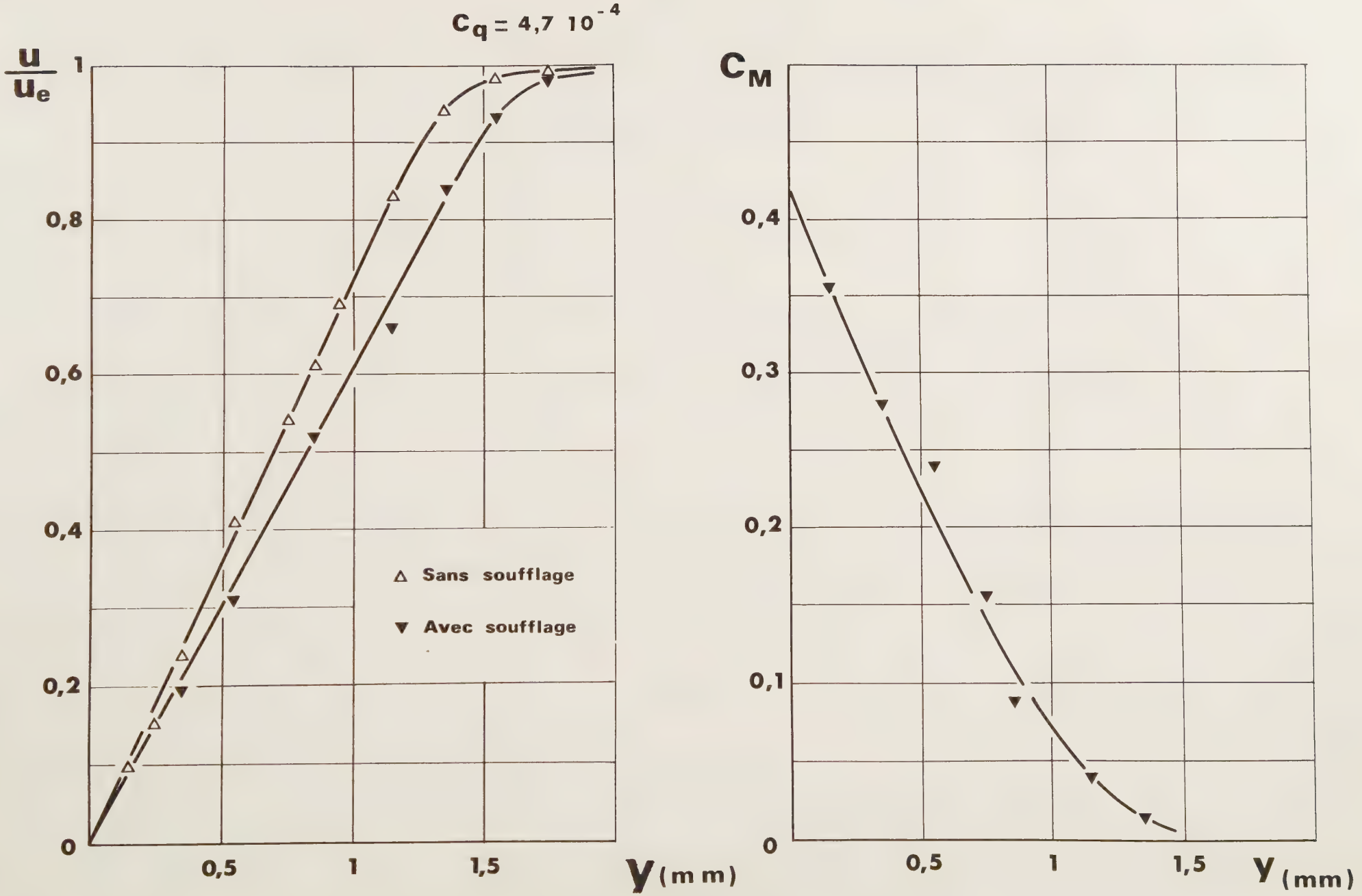

$C_q = 4,7\ 10^{-4}$
$\frac{u}{u_e}$
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,5
1
1,5
y (mm)
△ Sans soufflage
▼ Avec soufflage
C_M
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,5
1
1,5
y (mm)

FIG.12

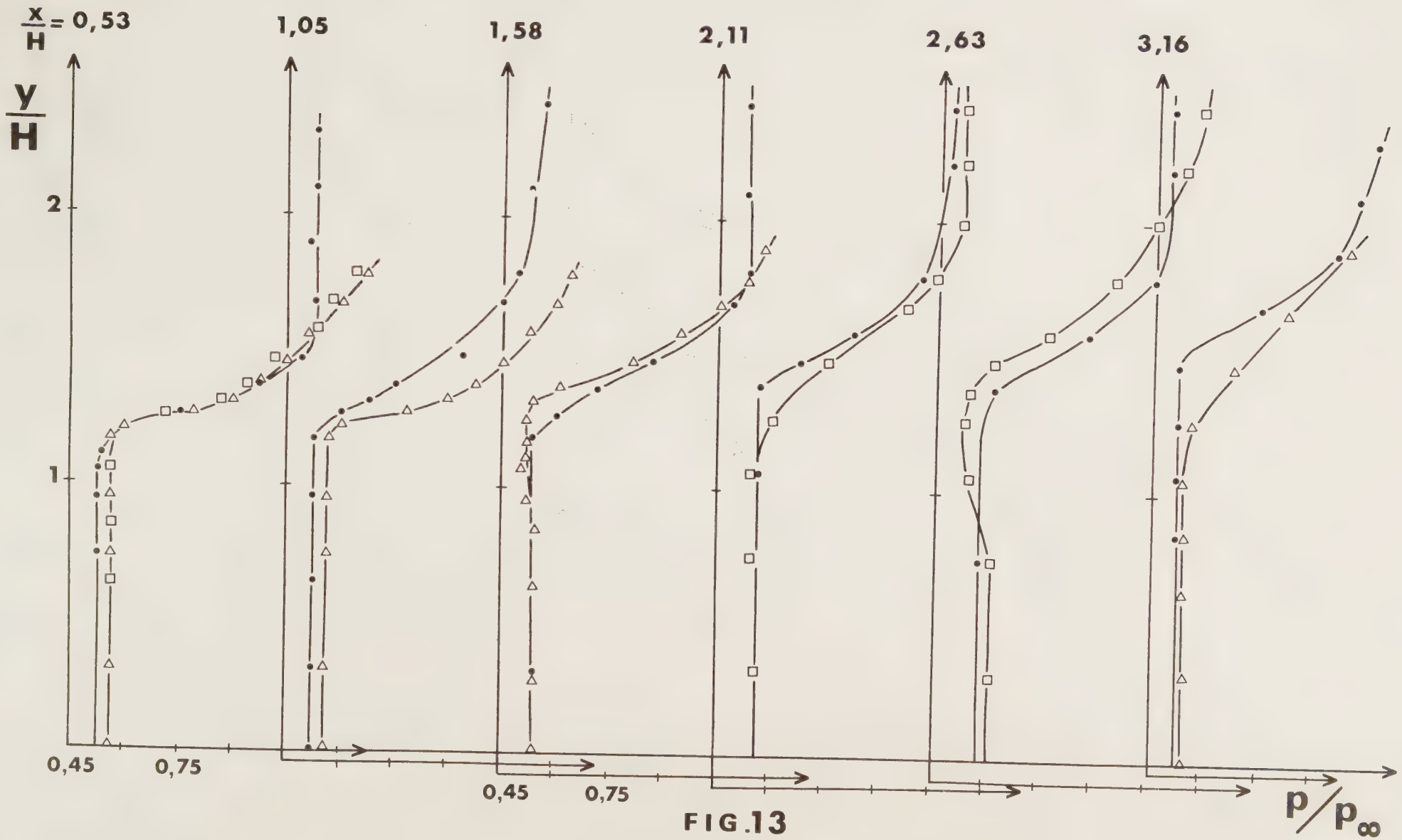

Sans soufflage •
Avec soufflage □ $C_q = 4,7\ 10^{-4}$
△ $C_q = 8,5\ 10^{-4}$
$\frac{x}{H} = 0,53$
1,05
1,58
2,11
2,63
3,16
$\frac{y}{H}$
2
1
0,45
0,75
0,45
0,75
p/p_∞

FIG.13

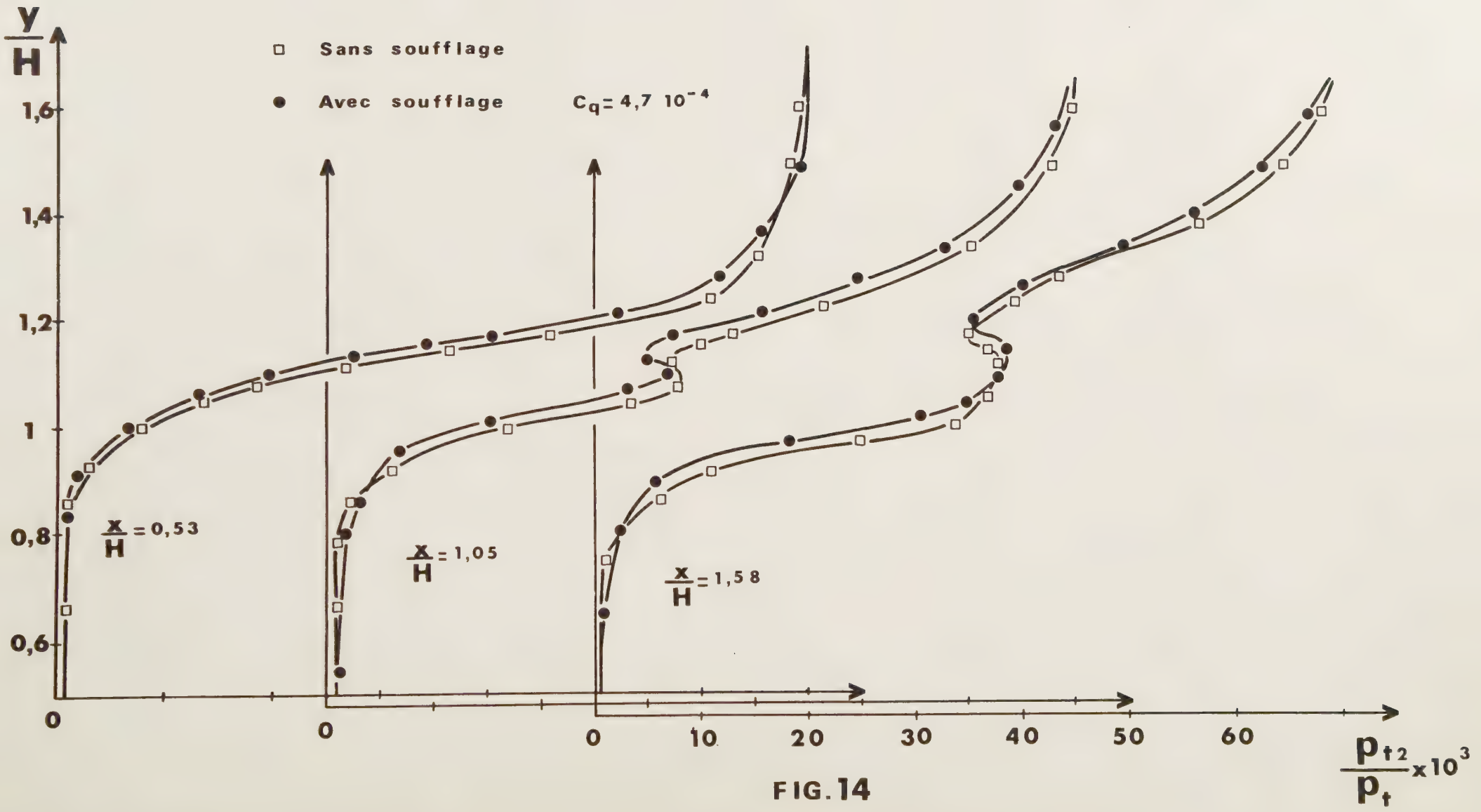

y/H
Sans soufflage
Avec soufflage
$C_q = 4,7\ 10^{-4}$
1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
x/H = 0,53
x/H = 1,05
x/H = 1,58
0
0
0
10
20
30
40
50
60
$\frac{p_{t2}}{p_t} \times 10^3$

FIG. 14

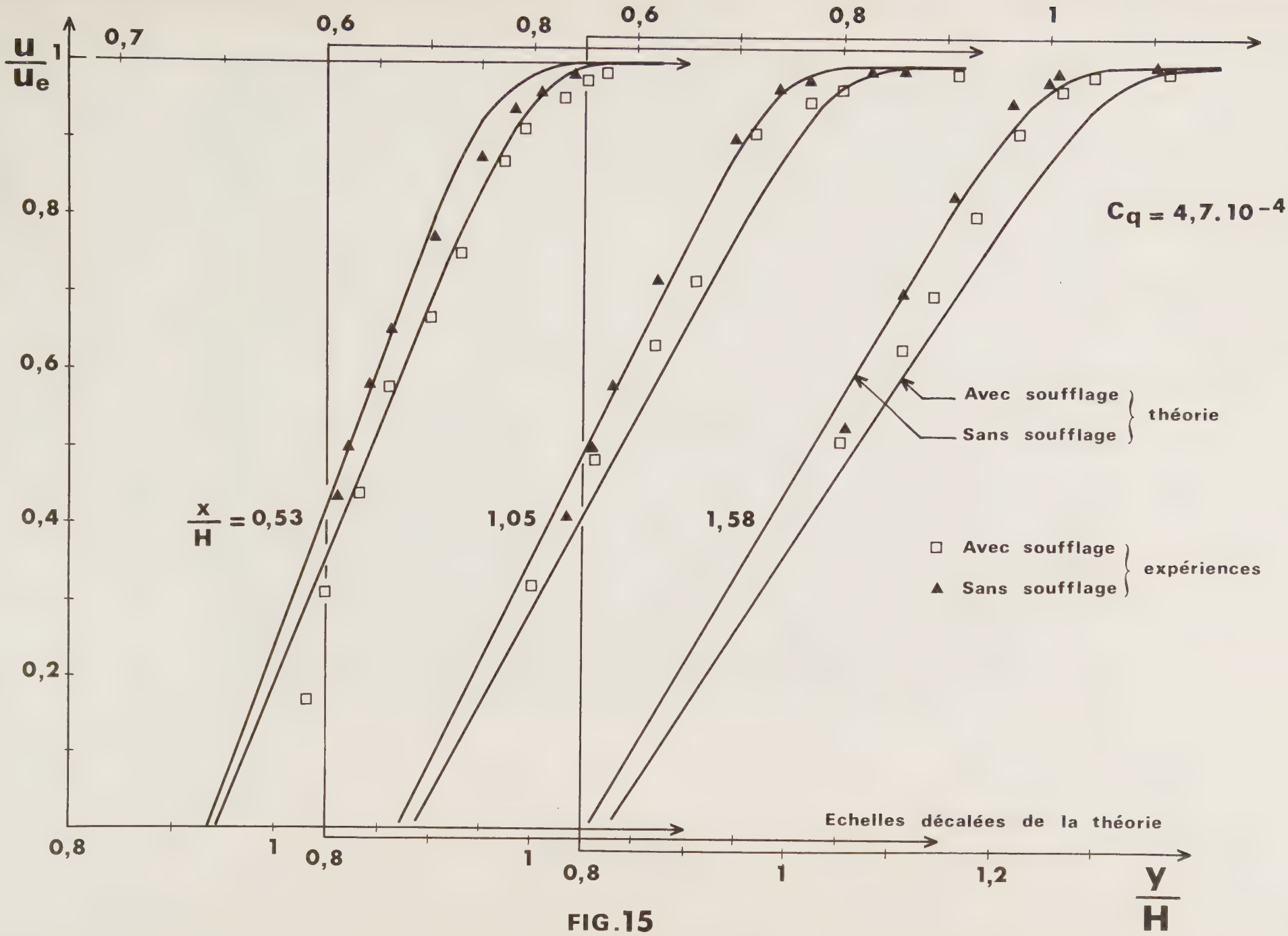
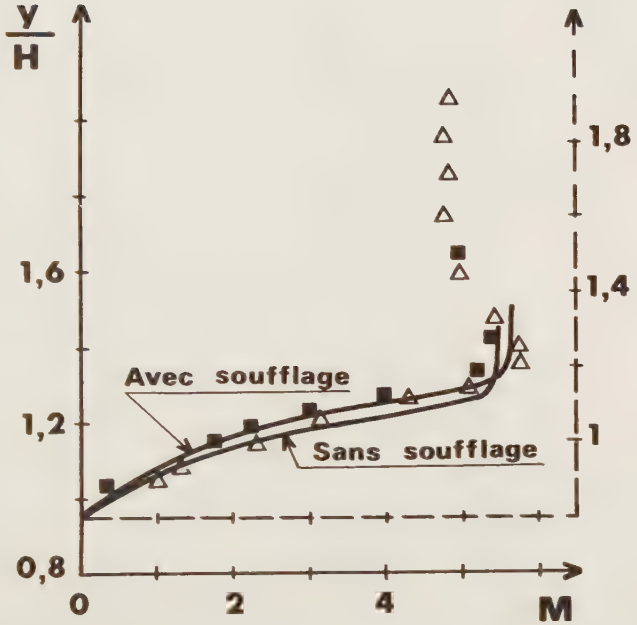

u/ue
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0,7
0,6
0,8
0,6
0,8
1
x/H = 0,53
1,05
1,58
Cq = 4,7.10-4
Avec soufflage
Sans soufflage
théorie
Avec soufflage
Sans soufflage
expériences
Echelles décalées de la théorie
0,8
1
0,8
1
0,8
1
1,2
y/H

FIG.15

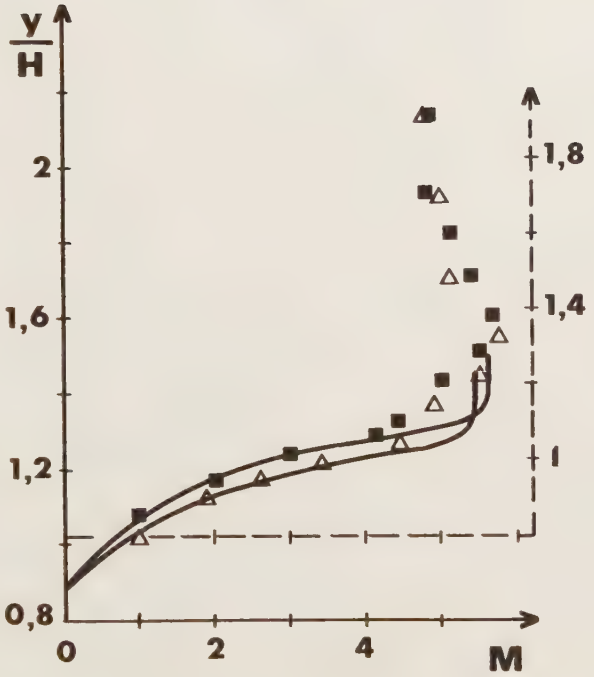
$C_q = 4,7.10^{-4}$

■ Avec soufflage
△ Sans soufflage
} Expériences

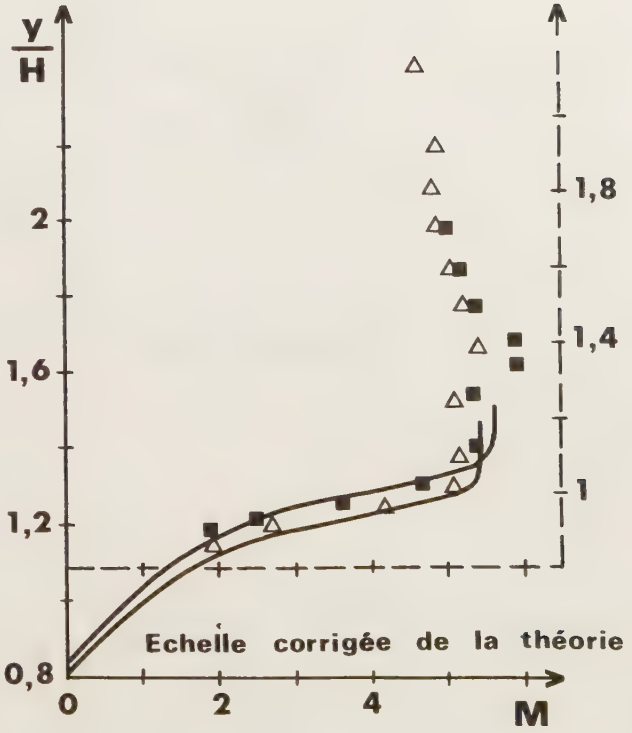
——— Théorie



$\frac{x}{H} = 0,53$



$\frac{x}{H} = 1,05$



$\frac{x}{H} = 1,56$

FIG.16

FIG.17

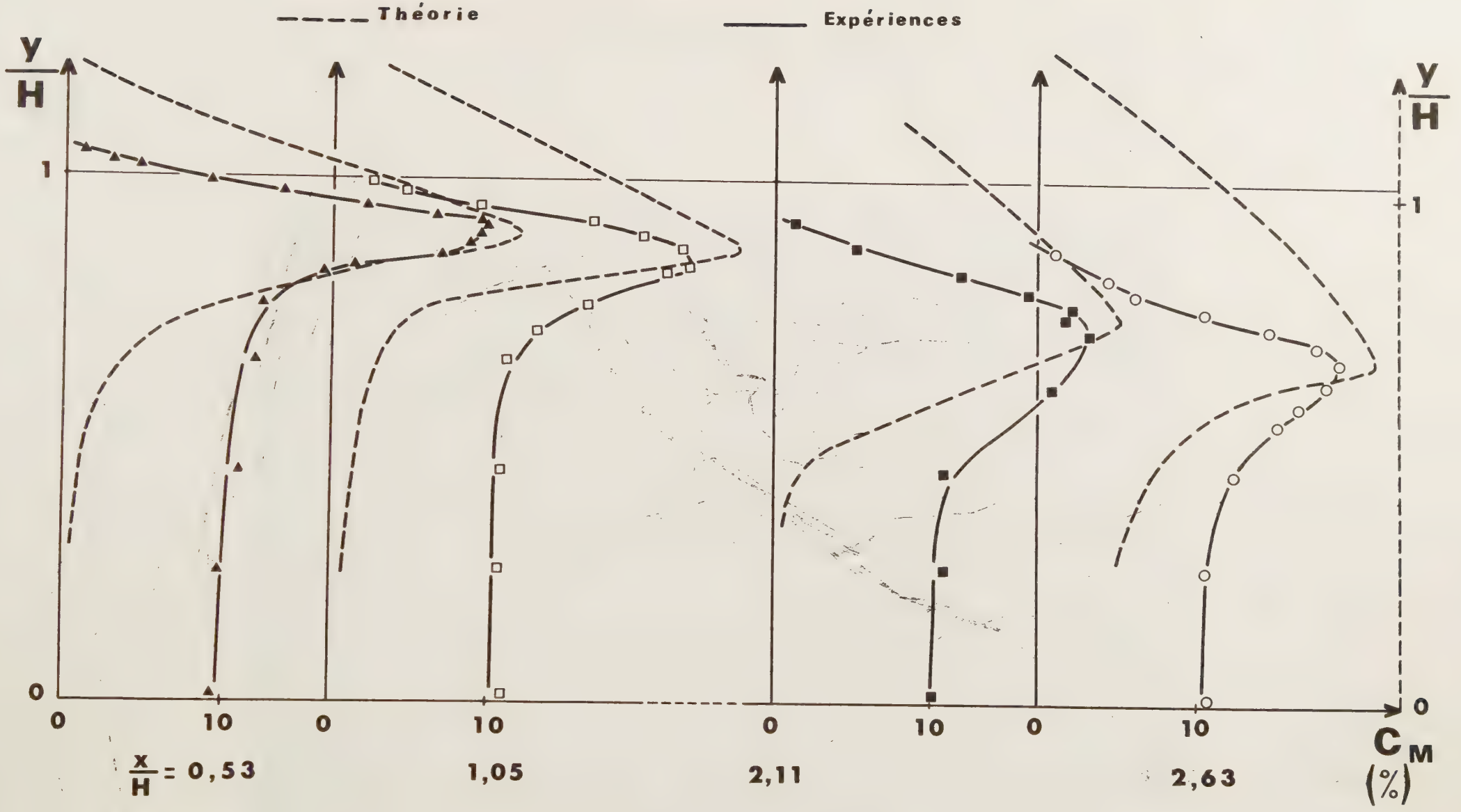

Théorie
Expériences
y/H
1
0
0
10
0
10
0
10
0
10
0
y/H
1
0
C M (%)
x/H = 0,53
1,05
2,11
2,63

FIG.18

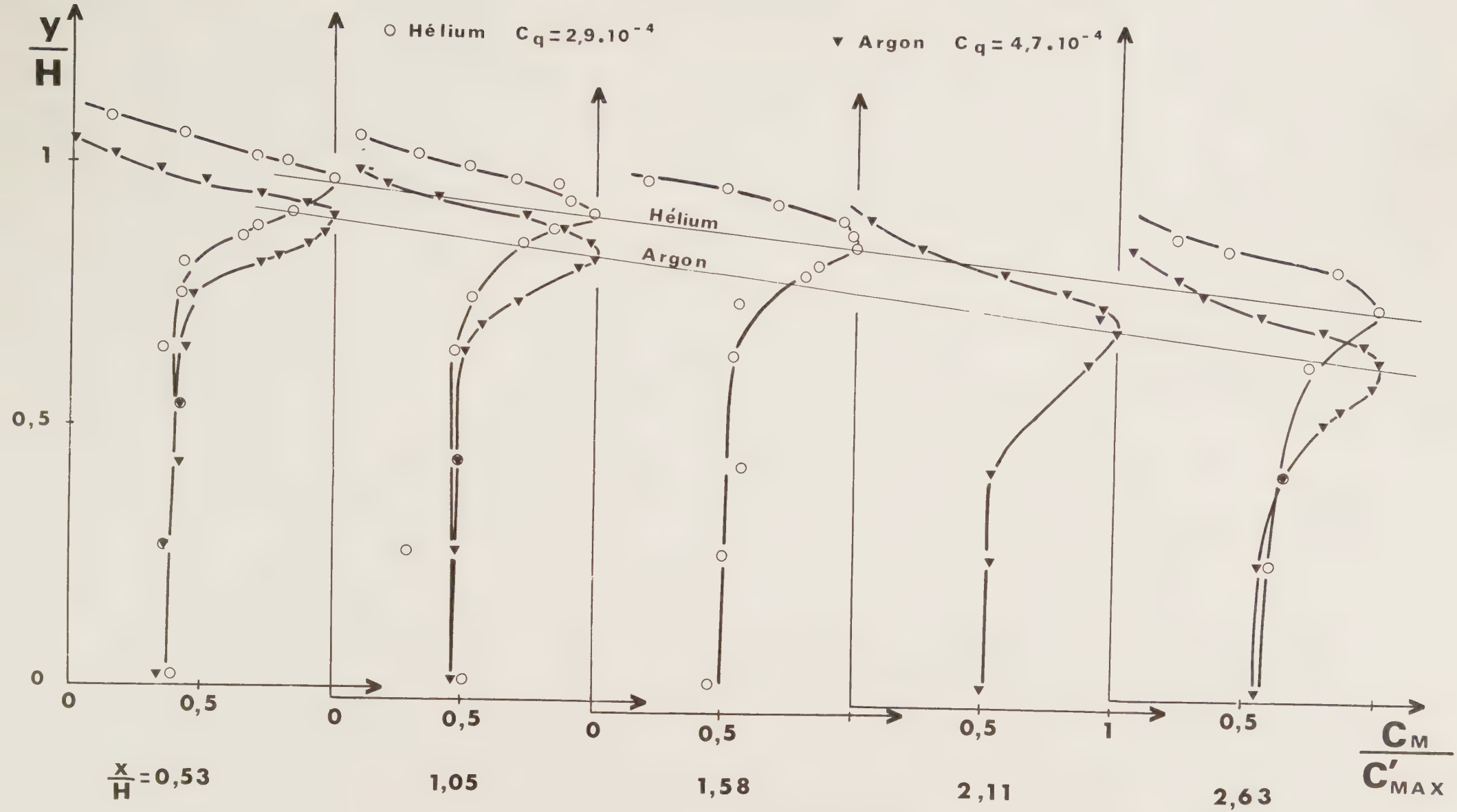

y/H
○ Hélium Cq = 2,9.10⁻⁴
▼ Argon Cq = 4,7.10⁻⁴
Hélium
Argon
1
0,5
0
0
0,5
0
0,5
0
0,5
0,5
1
0,5
CM / C'MAX
x/H = 0,53
1,05
1,58
2,11
2,63

FIG.19

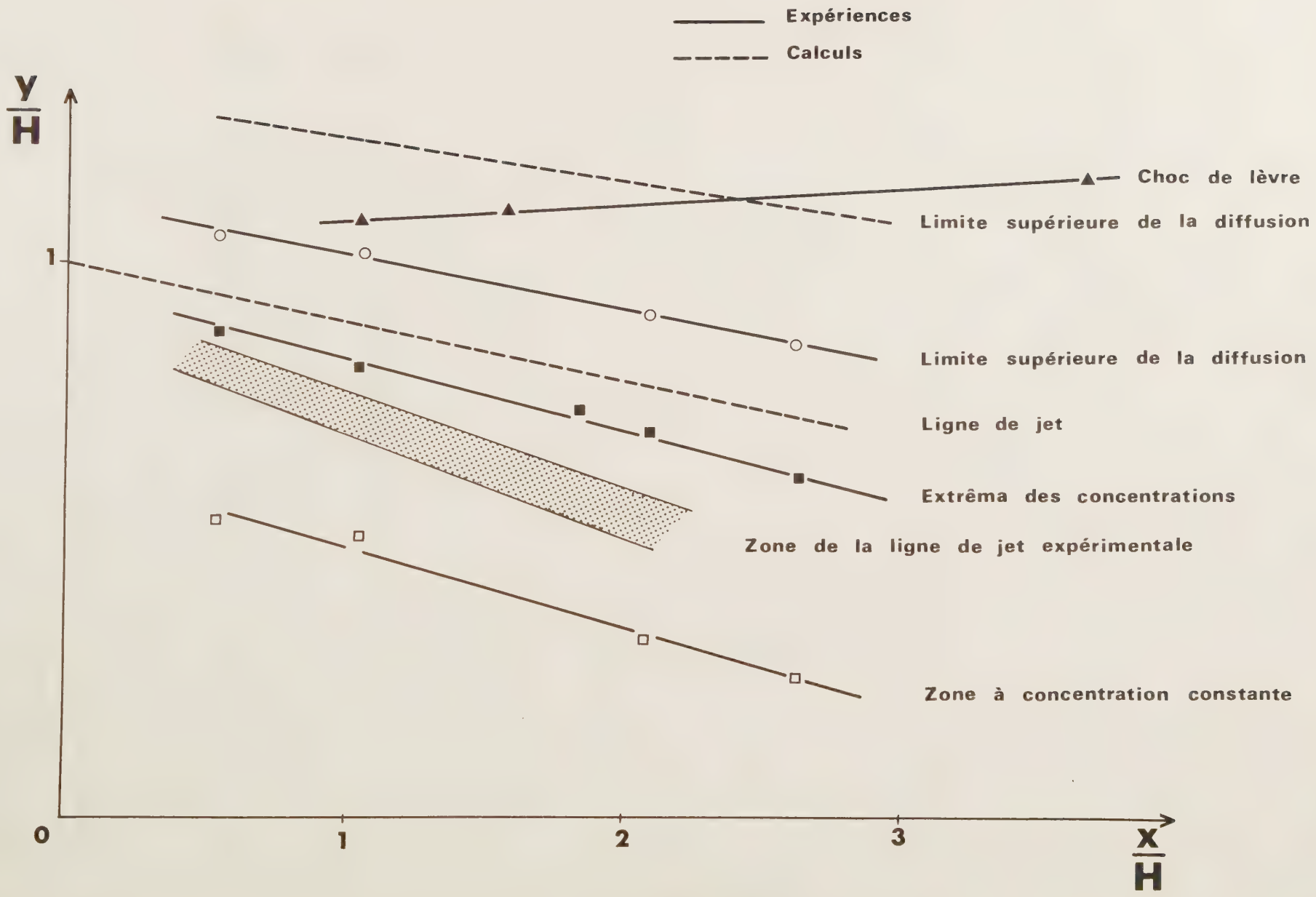

Expériences
Calculs
y/H
1
Choc de lèvre
Limite supérieure de la diffusion
Limite supérieure de la diffusion
Ligne de jet
Extrêma des concentrations
Zone de la ligne de jet expérimentale
Zone à concentration constante
0
1
2
3
x/H

FIG.20

ACADÉMIE DE PARIS

UNIVERSITÉ DE PARIS VI

4, Place Jussieu - 75230 PARIS-CEDEX 05

SERVICE DE LA SCOLARITE

Bureau des Enseignements du 3e cycle

TÉLÉPHONE 336-25-25 : 325-12-21

[illegible]
PIERRE ET MARIE CURIE

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT :

THESE DE : DOCTEUR- INGENIEUR

NOM : Monsieur MAGRE

Prénoms : Philippe

né le 21 Août 1950 à Paris Dépt : Seine

1ère THESE : " Etude du transfert de masse dans un culot en écoulement supersonique ."

2e THESE (Propositions faites par l'Université) :

PRESIDENT.M. MALAVARD

EXAMINATEURS.MM. BERNARD
GOSSE
DIEP

Vu et Approuvé

PARIS, le 1 JUILLET 1975

Le Président

de l'Université de PARIS VI